Cálculo diferencial

para bachilleratos tecnológicos

Ludwing Javier Salazar Guerrero

2ª edición

PATRIA
educación

Cálculo diferencial

para bachilleratos tecnológicos

Ludwing Javier Salazar Guerrero

Acorde con el modelo educativo para la educación obligatoria

PATRIA
educación

Contacto

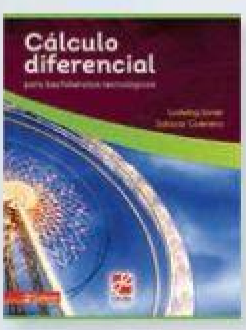
CORREO
Renacimiento 180
Col. San Juan Tlihuaca
Azcapotzalco, 02400
Ciudad de México

FAX
(01 55) 5354 9101
(01 55) 5354 9102

E-MAIL
info@editorialpatria.com.mx

HOME PAGE
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Alma Sámano Castillo
Supervisión de producción editorial: Miguel Ángel Morales Verdugo
Diseño de portada e interiores: Perla Alejandra López Romo
Diagramación: Jorge Antonio Martínez Jiménez, Gustavo Vargas Martínez
Ilustraciones y fotografías: Perla Alejandra López Romo, Jorge Antonio Martínez Jiménez, Gustavo Vargas Martínez, Thinkstock



Calculo diferencial
para bachilleratos tecnológicos
Serie DGETI

Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca
Del. Azcapotzalco, Código Postal 02400, Ciudad de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industrial Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN e-book: 978-607-744-887-7 (Primera edición e-book)

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición e-book: 2016

Tabla de contenidos

PARTE 2 Eje. Pensamiento y lenguaje variacional. Segunda parte 68

PARTE 3 Eje. Pensamiento y lenguaje variacional. Tercera parte 120


PARTE
4

Presentación

Cálculo diferencial es una obra basada en el modelo de competencias, apegado al plan de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial de la Secretaría de Educación Pública.

El libro se divide en cuatro partes temáticas. En cada una de ellas hay secuencias didácticas (Deduce y aprende) diseñadas a partir de situaciones problemáticas vinculadas al tema integrador y a contenidos fácticos, procedimentales y actitudinales, propiciando que el estudiante muestre disposición para trabajar en forma individual y en equipo. Esto permitirá la discusión y con ello que comunique sus ideas, lo que permite la interiorización del conocimiento. Asimismo, por medio de él utilizará elementos de la tecnología de la comunicación como son la calculadora científica y el graficador Winplot. Al principio de cada parte se encuentra la evaluación diagnóstica y la secuencia integradora, así como la rúbrica para evaluarla. Al final de la obra se presenta una lectura, la autoevaluación y la recuperación de la información.

Cada parte de *Cálculo diferencial* se ha organizado en tres momentos: apertura, desarrollo y cierre. Las actividades de apertura son aquellas a partir de las cuales es posible identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las percepciones y los conocimientos previos del alumno; estas actividades se realizan por medio de diferentes técnicas, como pueden ser lluvia de ideas, cuestionarios o las que el maestro considere pertinentes y que podrán durar de 5 a 10 minutos. Las actividades de desarrollo relacionan los saberes, los conocimientos previos e introducen nuevos conocimientos técnicos y científicos, las preconcepciones con los nuevos conocimientos. Las actividades de cierre permiten al alumno realizar una síntesis y recuperar todo lo estudiado, para ello se sugiere utilizar mapas mentales o conceptuales, exposiciones orales de los estudiantes, la solución de ejercicios y el uso del portafolios de evidencias.

Cálculo diferencial se ha diseñado para que el alumno sea el protagonista y desarrolle sus habilidades de lectura, expresión oral y escrita, pues contiene abundantes ejercicios y problemas que le permiten al alumno adquirir agilidades por el curso, relacionando la teoría con su entorno social.

En el diseño de la obra se reflejan más de 40 años de experiencia docente, en las cuales se ha puesto especial atención en aquellos temas que se le dificultan al alumno. Se ha utilizado un lenguaje claro para el alumno y el diseño de la obra facilita el aprendizaje, además de la impresión a color, a fin de brindar al alumno una obra que lo llame a trabajar.

Por todo lo anterior consideramos que este libro es un auxiliar didáctico para el docente y el alumno en el trabajo diario, ya que en él se encontrará un gran apoyo, pues está diseñado para que al alumno se le facilite el aprendizaje durante el curso. Es una obra diferente donde se tratan los temas en forma clara y concisa sin perder el rigor matemático que le permita abordar nuevos temas con facilidad.

Finalmente deseo agradecer a la Secretaría Académica y a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional.

El autor

Competencias

Con los contenidos y la forma de trabajo se pretende coadyuvar al desarrollo de las siguientes competencias.

Competencias genéricas

- **Se conoce** y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- **Es sensible** al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
  - Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- **Escucha,** interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
  - Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- **Desarrolla** innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Aprende** por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
  - Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- **Participa** y colabora de manera efectiva en grupos diversos.
  - Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
  - Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
  - Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares:

- **Construye** e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- **Formula** y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- **Explica** e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los constrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- **Argumenta** la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.
- **Cuantifica,** representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- **Interpreta** tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Propósitos de la asignatura

Que el estudiante aprenda a identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación del cambio continuo y su discretización numérica con fines predictivos.

I

Introducción

APERTURA

Evaluación diagnóstica

1. El conjunto formado por {1, 2, 3, 4, …} recibe el nombre de: ( )
   a) Números naturales *b*) Números enteros
   c) Números racionales *d*) Números irracionales

2. El conjunto formado por $Q = \{x \mid x$ es de la forma a/b y b es distinto de cero}, recibe el nombre de: ( )
   a) Números naturales *b*) Números enteros
   c) Números racionales *d*) Números irracionales

3. ¿Cuál de las siguientes propiedades no es propiedad de la igualdad? ( )
   a) Si sumamos a ambos miembros de la igualdad una cantidad, la igualdad no se altera.
   b) Si multiplicamos a ambos miembros de la igualdad por una cantidad la igualdad no se altera.
   c) Si restamos a ambos miembros de la igualdad una cantidad la igualdad no se altera.
   d) Si dividimos a ambos miembros de la igualdad una cantidad la igualdad se altera.

4. Una cantidad puede ser mayor, menor o igual es la propiedad: ( )
   a) Conmutativa *b*) De cerradura *c*) Tricotomía *d*) Asociativa

5. Si sumamos $\frac{1}{2}$ a ambos miembros de la desigualdad $5 > 3$ la nueva desigualdad es: ( )
   a) $\frac{10}{2} > \frac{6}{2}$ *b*) $\frac{5}{2} > \frac{3}{2}$ *c*) $\frac{11}{2} > \frac{7}{2}$ *d*) $\frac{11}{2} < \frac{7}{2}$

6. El resultado de la operación $\frac{7}{5} - 1 =$ ( )
   a) $\frac{6}{5}$ *b*) $\frac{7}{4}$ *c*) $-\frac{2}{5}$ *d*) $\frac{2}{5}$

7. El resultado de la operación $-\frac{3}{5} - 1$ es igual a: ( )
   a) $\frac{8}{5}$ *b*) $\frac{2}{5}$ *c*) $-\frac{3}{4}$ *d*) $-\frac{8}{5}$

8. Realiza la siguiente operación: $2 + 3 \times 6 =$ ( )
   a) 30 *b*) 20 *c*) 36 *d*) 45

9. Haz la siguiente operación: $2(2 - 5 \times 8) - 3 =$ ( )
   a) 25 *b*) −39 *c*) 45 *d*) −79

10. Despeja a x en la siguiente desigualdad: $2 + 3(4) > x - 3(6)$: ( )
    a) $36 > x$ *b*) $x < 32$ *c*) $-4 > x$ *d*) $x = 32$

Tema integrador

Secuencia didáctica

Deduce y aprende

El frijol

Apertura de la actividad

Propósito: Desarrollar las habilidades del alumno en problemas de aplicación a casos reales.

Conocimientos previos: Los tipos de frijol que existen en México.

Los tipos de fertilizantes que se utilizan para el frijol.

El proyecto se divide en dos etapas: La primera es la documental y la toma de datos. La segunda es la presentación de la información del proyecto.

La primera se realiza en la primera parte y la segunda en la cuarta parte.

Desarrollo de la actividad

1. Se forman equipos de cinco alumnos.
2. Realizan su portafolio de evidencias, tomando fotos o videos o lo que consideren como testimonios de su trabajo.
3. El proyecto consiste en la siembra de por lo menos cinco vasos con frijoles, los que tendrán diferentes condiciones de siembra, la cantidad de sol, la cantidad de agua, fertilizantes, variedad del frijol, música, etc. Tales condiciones las deberán especificar para cada vaso.

Cierre de la actividad

4. Cuando la planta empiece a crecer, se anotará los centímetros que crezca. Se tomarán estas medidas dos veces cada día a la misma hora (se deben tomar fotos de las mediciones).
5. Formen una tabla con los datos y tracen una gráfica para cada vaso.
6. Tomen en cuenta que si la planta no crece entonces se perderán dos puntos por cada vaso.
7. Realicen una comparación de los datos y establezcan la importancia de las condiciones de cada siembra.
8. Representen gráficamente los datos de cada una de las plantas.
9. Se hará una presentación del proyecto con uso de los medios electrónicos al final de la cuarta parte.

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Formen equipos de cinco alumnos.	• Formen su portafolio de evidencias.	• Escriban en el cuaderno el análisis que hicieron sobre la situación didáctica.
• Lean la secuencia didáctica que se plantea.	• Analicen la información obtenida de la investigación. • Diseñen los instrumentos para agrupar la información que se requiere.	• Tracen un mapa mental. • Realicen la toma de datos, consistente en medir el crecimiento de la planta dos veces al día a la misma hora.

Apertura	Desarrollo	Cierre
	• Discutan en equipo la forma de realizar la investigación documental. • En equipo discutan los tipos de frijoles que sembrarán. • Discutan en equipo cómo realizarán las actividades para la siembra de los frijoles. • En equipo discutan las condiciones del experimento.	• Elaboren una tabla con los datos obtenidos: día/hora, crecimiento. • Realicen una comparación del crecimiento de cada una de las plantas y establezcan las causas de estas diferencias. • Tracen una gráfica del crecimiento de cada una de las plantas.
• Analicen la actividad que se plantea.	• Analicen la importancia de realizar este tipo de proyectos y anoten sus conclusiones. • Determinen los instrumentos de presentación gráfica. • Recuerden incluirlos en la presentación de la información.	• Realicen una presentación del proyecto, en el que se incluyan las evidencias formuladas al utilizar fotografías, video, etcétera. • Anoten sus conclusiones.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Documento

Instrumento: Rúbrica

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Análisis de la situación didáctica	Realiza una investigación completa de la situación.	Realiza una investigación clara y convincente.	La investigación no es clara y sólo se presentan recortes de páginas web.	La investigación es deficiente y no aporta conocimientos claros.
Desarrollo del tema integrador	Hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones son correctas.	Hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados. Sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados. Sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta no están bien fundamentados. No tiene conclusiones.
Presentación de resultados	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son claras. Presenta los datos de las cinco plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son escasas. Presenta por lo menos los datos de cuatro plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones no son claras. Presenta por lo menos datos de tres plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones no son claras. Presenta los datos de dos o menos plantas de frijol.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Exposición

Instrumento: Rúbrica

Valor: 40

Criterios	Estándares		
Presentación	Destaca su organización y comprensión del proyecto. La exposición fue clara. El grupo siempre se interesó por el tema. Valor: 15 puntos.	Fue adecuada y con cierta organización. El grupo pudo entender la mayor parte de lo que se dijo. Valor: 8 puntos.	Presentación mal preparada. Información desorganizada e incompleta. El grupo no prestó atención a la exposición. Valor: 4 puntos.
Cualidades de la expresión oral	Correcta dicción, volumen adecuado; estableció contacto visual con el grupo; empleó correctamente el lenguaje kinésico y proyectó confianza. No incurrió en el uso de muletillas. Valor: 15 puntos.	Demostró poca confianza ya que evitaba el contacto visual con el grupo. Empleó correctamente el lenguaje kinésico. Ocasionalmente usó muletillas. El volumen fue adecuado. Valor: 8 puntos.	Demostró inseguridad, empleó muletillas; usó un volumen bajo de la voz y no se observó control del lenguaje kinésico. Valor: 4 puntos.
Tiempo	Duró el tiempo asignado. Valor: 5 puntos.	Duró aproximadamente el tiempo asignado. Valor: 3 puntos.	La presentación fue muy breve o muy extensa. Valor: 1 punto.
Material de apoyo	Presentó lenguaje icónico para reforzar lo expresado verbalmente. El material contuvo palabras acordes al nivel del receptor y ortografía. Colocó solamente los datos relevantes. Valor: 5 puntos.	Presentó lenguaje icónico, pero el material estuvo recargado de información. Tuvo errores ortográficos. Contuvo palabras acordes al nivel del receptor. Valor: 3 puntos.	Presentó material con ausencia de lenguaje icónico. Contuvo errores ortográficos y descuidó el nivel del receptor. Valor: 1 punto.

Propósito

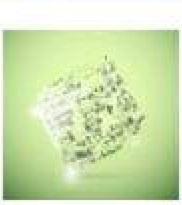
Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que solucionen problemas surgidos de la actividad humana, tales como la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

¿Qué aprenderás?

- Básicamente recuperarás conocimientos que utilizaremos en este curso y los cuales consideramos que son importantes.

¿Para qué te servirá?

Para poder expresar en forma simbólica los elementos de una función.



Cuando el tiempo pase y tú me olvides, silenciosa vivirás en mí; porque en la penumbra de mis pensamientos, todos los recuerdos me hablarán de ti.

Gustavo Adolfo Bécquer

El recuerdo que deja un libro es más importante que el libro mismo.

Gustavo Adolfo Bécquer

DESARROLLO

Introducción

Apertura de la actividad

Deduce y aprende

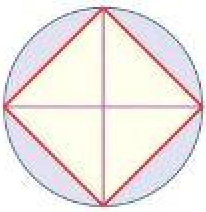
Área de un círculo, método de exhaución

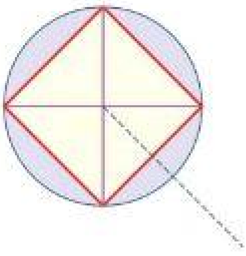
Propósito: El alumno determinará el área de un círculo utilizando polígonos inscritos.

Conocimientos previos: Área del círculo, área de un polígono.

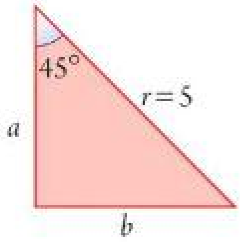
Material:
- Juego de escuadras
- Colores
- Compás
- Hojas blancas
- Transportador
- Calculadora científica

Desarrollo de la actividad





1. Se forman equipos de cinco alumnos.
2. Cada alumno traza una circunferencia de 5 cm de radio en una hoja.
3. Cada alumno divide su circunferencia en cuatro partes iguales y traza el polígono, como en la figura de la derecha.
4. Ilumina de color azul la región entre el polígono y la circunferencia.
5. ¿Son iguales los ángulos centrales que se obtienen de dividir la circunferencia? __________ y miden ___________ grados sexagesimales, o ___________ radianes.
6. Traza una perpendicular a uno de los lados que pase por el centro de la circunferencia o bisectriz del ángulo (ver figura de la derecha).
7. Los ángulos centrales que se obtuvieron con la bisectriz miden ___________
8. En el ángulo donde se trazó la bisectriz se forman dos triángulos iguales, ilumínalos de diferente color. De uno de ellos vamos a conocer su altura o apotema que es uno de los catetos y lo llamaremos "a", el otro cateto es la mitad del lado de la base del triángulo, lo llamaremos "b".
9. Para calcular a procedemos así: buscamos una función que relacione el ángulo, la hipotenusa y el cateto adyacente; recuerda que el valor de $r = 5$.



La función es: $\cos 45° = \dfrac{a}{r}$

de donde: $a = 5 \cos 45°$

Realiza lo mismo para b. La función es: ______________

Despejamos b = ______________

Pero como b es la mitad del lado del polígono, el lado mide $2\,b$ = ___________. Ahora calculemos el área (A) del triángulo, que es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A = \frac{\qquad\qquad}{2}$$

Como son cuatro triángulos el área se multiplica por cuatro.

Área del cuadrado: ______________

10. Cada alumno traza una circunferencia de radio r = 5 cm y dentro de ella traza un polígono *inscrito* según la regla siguiente:

el alumno 1: traza un polígono de tres lados,

el alumno 2: un polígono de ocho lados,

el alumno 3: un polígono de cinco lados,

el alumno 4: uno de seis lados y

el alumno 5: otro de nueve lados.

11. Ilumina el área entre el círculo y el polígono.

12. Cada alumno calcula el área del polígono lo más exacto que se pueda y anota su valor en la tabla siguiente.

Lados n	Área	Lados n	Área	Lados n	Área
3		5		8	
4		6		9	

13. Cada alumno traza una circunferencia de radio r = 5 cm y dentro de ella un polígono inscrito, utilizando la tabla siguiente para aproximarse al área de la circunferencia.

el alumno 1: traza un polígono de 10 lados,

el alumno 2: un polígono de 12,

el alumno 3: uno de 15,

el alumno 4: uno de 20 lados y

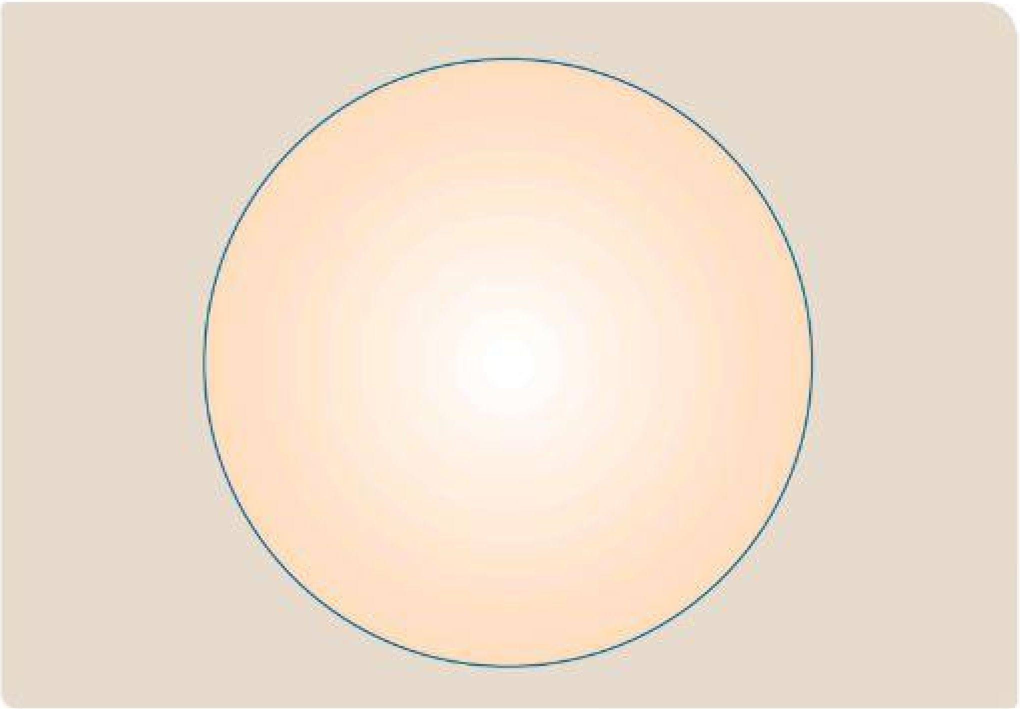
el alumno 5: otro de 25 lados.

14. Cada alumno calcula el área del polígono que le tocó.

15. Todos los alumnos concentran su información y la organizan.

Lados	Área inscrita	$\lvert\pi r^2$ – áreas inscritas$\rvert$ = error
10		
12		
15		

Lados	Área inscrita	$\lvert\pi r^2$ – áreas inscritas$\rvert$ = error
20		
25		



16. Calcula el área de la circunferencia de radio $r = 4$ cm (área $= \pi r^2$) y compárala con los resultados que has obtenido.

área del círculo (πr^2) = __________

Determina la magnitud del error que se tiene realizando la operación siguiente:

$|\pi r^2 -$ área del polígono$|$ = __________

Anota tus valores en la columna correspondiente de la tabla anterior.
El valor absoluto nos indica qué tan lejos nos encontramos del valor verdadero del área.

17. Si el número de lados del polígono es muy grande, ¿cómo será el área del polígono comparada con el área del círculo?

____

____

Cierre de la actividad

Análisis

En el polígono se utilizan las siguientes fórmulas para determinar el valor de los catetos del triángulo que se forma al trazar la bisectriz.

El cateto opuesto b se determina utilizando la siguiente relación: $$b = r \operatorname{sen} \frac{180°}{n}$$

y la altura a con la siguiente: $$a = r \cos \frac{180°}{n}$$

Analicemos lo que sucede cuando n tiende a ser muy grande, daremos valores a n para obtener el valor de las fórmulas anteriores, en ambos casos utiliza la calculadora para realizar los cálculos. Ordena la información en la siguiente tabla (el radio r es el mismo que se utilizó para trazar la circunferencia).

n	$b = r \operatorname{sen}(180°/n)$	$a = r\cos(180°/n)$
3		
10		
100		
1 000		
10 000		

n	$b = r \operatorname{sen}(180°/n)$	$a = r\cos(180°/n)$
100 000		
1 000 000		
10 000 000		
100 000 000		
1 000 000 000		

Observa los valores que anotaste en la tabla, cuando n tiende a ser muy grande (se dice que tiende a infinito ∞) b tiende a tomar el valor __________, geométricamente $2b$ representa ______________ y tiende a ser __________, o sea, casi __________________.

Para el caso de a cuando n tiende a ser muy grande (se dice que tiende a infinito ∞) el valor de a tiende a tomar el valor de _________, geométricamente a representa ______________ y tiende a ser ______, o sea, es el valor del radio.

Para escribir esto en lenguaje matemático se utiliza una idea que surgió entre 1664 y 1666 desarrollada por Newton y Leibniz.

$$\lim_{n \to \infty} b = \lim_{n \to \infty} r \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

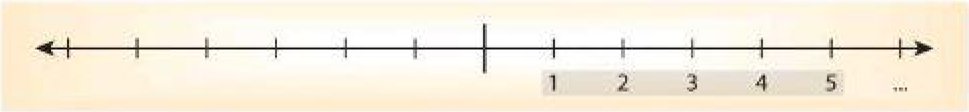
Que se lee: El límite cuando n tiende a infinito de b es igual al límite cuando n tiende a infinito de r seno de 180° entre n.

Para el caso de a, exprésalo utilizando la idea de límite: ________________________________

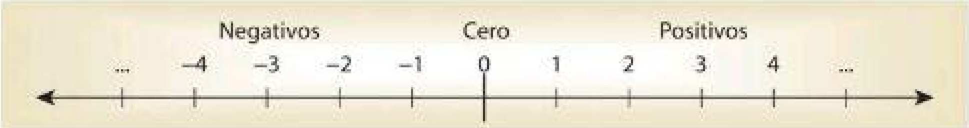
Números reales ($\mathbb{R}$)

Los números reales constan de varios conjuntos, los cuales veremos cómo se encuentran formados o sea qué elementos los constituyen.

Números naturales ($\mathbb{N}$). Son los números 1, 2, 3, 4, 5, ... y se representan por la letra $\mathbb{N}$ (los tres puntos indican que continúan en forma infinita).



Números enteros ($\mathbb{Z}$). Estos números, que se representan con la letra $\mathbb{Z}$, se forman por los números naturales, los simétricos de éstos (que son los números negativos) y el cero (que representa la ausencia de unidades, por lo que carece de signo).



Números racionales ($\mathbb{Q}$). Es la razón que existe entre dos números enteros $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de cero.

Nota: Todo número racional tiene una forma de representación decimal infinita periódica.

Ejemplo

Los siguientes números son racionales de la forma $\frac{a \longleftarrow \text{numerador}}{b \longleftarrow \text{denominador}}$.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{4}$

Ejemplo

Los siguientes números son racionales de la forma decimal *periódica infinita*. Se obtienen dividiendo el numerador entre el denominador.

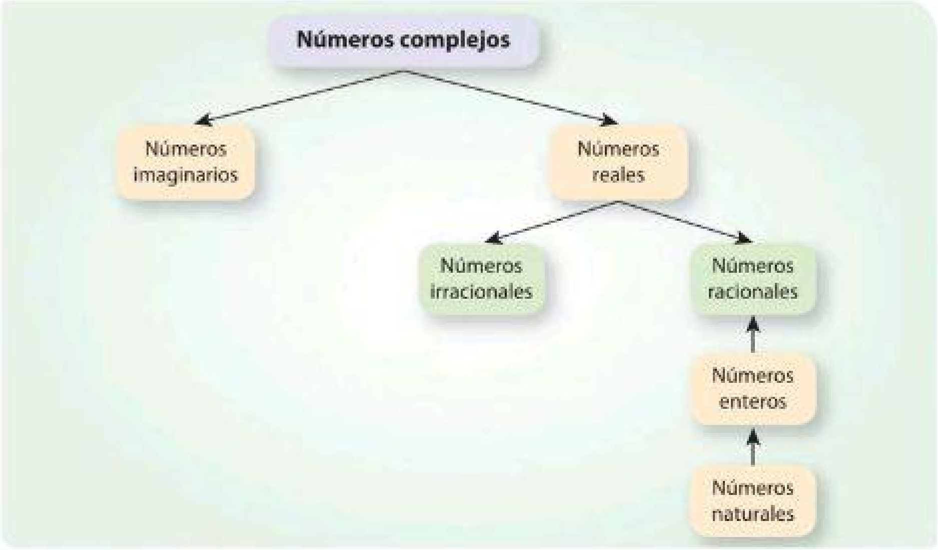
0.750... 0.250... 0.3333... 0.542727...

Números irracionales ($\mathbb{I}$). Es una representación decimal infinita *no periódica*.

Ejemplo

$\sqrt{2} = 1.41423562\ldots$ $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots$ $\pi = 3.141592654\ldots$ $e = 2.718281828\ldots$

A todas estas series de números (conjuntos) se les conoce como **números complejos** y los representamos gráficamente así:



Ejercicio

Investiga cómo nacieron los números.

Une con una línea continua a los números que se asocien en el grupo más adecuado. Usa un color diferente para cada grupo.

$4.3657812\ldots$ $\quad 123$

$\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{9}$

3 $\quad \frac{5}{2}$ $\quad 352$

$3.666\ldots$ $\quad 4.57397\ldots$

$\sqrt{-49}$ $\quad \sqrt{6}$

$\mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{8}$ $\quad 1.15436343434\ldots$

$\sqrt{13}$ $\quad 45$ $\quad \mathbb{I}$ $\quad \mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ $\quad -75$ $\quad \frac{1}{5}$

$\sqrt{25}$ $\quad i$

$\sqrt{15}$ $\quad 1.4142$ $\quad -6$ $\quad 1.4142\ldots$

$\frac{1}{3}$ $\quad -\sqrt{36}$

$2.45455\ldots$ $\quad -\frac{3}{5}$

$-\sqrt{13}$ $\quad -25$

$\frac{11}{12}$ $\quad \sqrt{-2}$

$\sqrt{81}$ $\quad \sqrt{121}$ $\quad \sqrt{-49}$

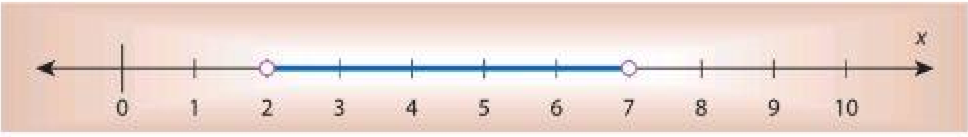
$-\sqrt{49}$ $\quad -\sqrt{2}$ $\quad -\frac{5}{4}$

-2 $\quad \sqrt{49}$

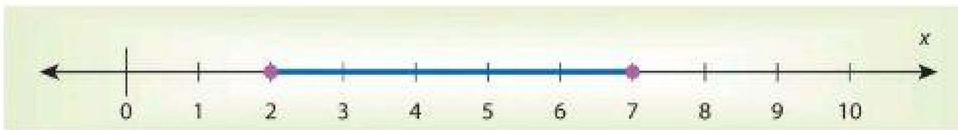
Intervalos y desigualdades

Los intervalos son segmentos de recta que utilizan los extremos de ésta para indicar su longitud y pueden ser:

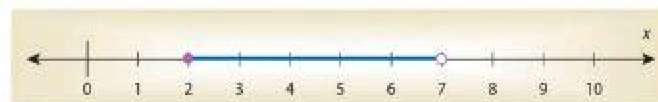
Abiertos, cuando los extremos no se incluyen y se utilizan los paréntesis para escribirlos. El intervalo abierto (2, 7), nos indica que los extremos no se incluyen y por ello se utilizan circunferencias.



Cerrados, cuando los extremos se incluyen y se utilizan los corchetes para escribirlos. El intervalo cerrado [2, 7], nos indica que los extremos se incluyen y por ello se utilizan círculos.

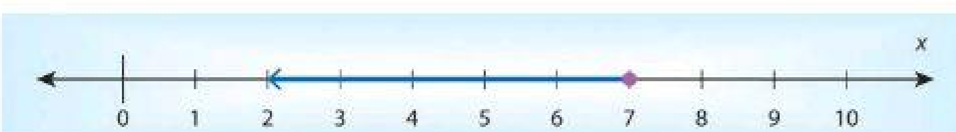


Semiabiertos o semicerrados son una combinación de intervalos abiertos y cerrados. Sean los intervalos (2, 7] o bien [2, 7)

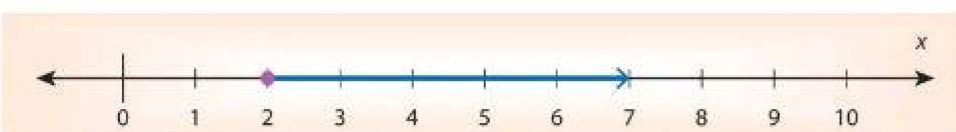


Los intervalos pueden tender a infinito por lo que ese valor es abierto.

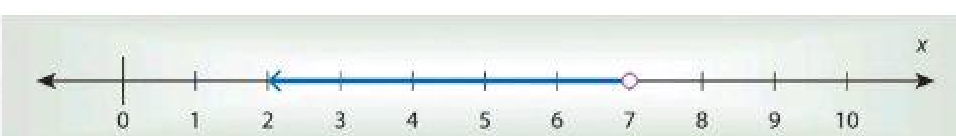
$(-\infty, 7]$



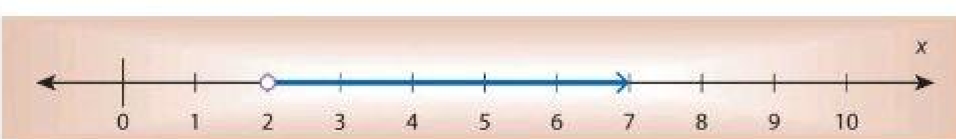
$[2, \infty)$



$(-\infty, 7)$



$(2, \infty)$



Las desigualdades, también llamadas inecuaciones, utilizan los símbolos, mayor que (>) y menor que (<). La forma de resolver una desigualdad lineal es el mismo que se utiliza para resolver las ecuaciones lineales, excepto cuando se multiplica o divide por un número negativo, ya que cuando se realiza esta acción la desigualdad se invierte. Hay ocasiones en las cuales se puede usar el mayor o igual que (≥) o menor o igual que (≤).

Para resolver inecuaciones es necesario aplicar las propiedades de las desigualdades.

Si $a > b$ y a, b y c son números reales se cumplen las siguientes propiedades donde el signo de la desigualdad no se altera:

1. Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ — Propiedad para la suma
2. Si $a > b$ entonces $a - c > b - c$ — Propiedad para la diferencia
3. Si $a > b$ entonces $a\,c > b\,c$ Si c es > 0 — Propiedad para el producto

4. Si $a > b$ entonces $\quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad$ Si $c > 0$ $\quad$ Propiedad para el cociente

Propiedades donde el signo de la desigualdad se altera:

5. Si $a > b$ entonces $\quad a\,c < b\,c \quad$ Si c es < 0 $\quad$ Propiedad para el producto

6. Si $a > b$ entonces $\quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad$ Si c es < 0 $\quad$ Propiedad para el cociente

Observa que en los puntos 5 y 6 la desigualdad se invirtió.

Ejemplos

Si usamos números tenemos que:

1. Si $16 > 8$ entonces $16 + 6 > 8 + 6$ $\quad 22 > 14$
2. Si $16 > 8$ entonces $16 - 6 > 8 - 6$ $\quad 10 > 2$
3. Si $16 > 8$ entonces $16 \times 6 > 8 \times 6$ $\quad 96 > 48$
4. Si $16 > 8$ entonces $\frac{16}{6} > \frac{8}{6}$ $\quad 2.66... > 1.33...$

Observa que el sentido de la desigualdad no cambió, pero en los siguientes ejemplos sí sucede, ya que se multiplica o divide por un número negativo.

5. Si $16 > 8$, entonces $16(-6) < 8(-6)$, la desigualdad se invierte: $-96 < -48$
6. Si $16 > 8$, entonces $\frac{16}{-6} > \frac{8}{-6}$ la desigualdad se invierte: $-2.66... < -1.33...$

Estas propiedades se cumplen en la misma forma cuando $a < b$.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $2x - 5 > 3$.

Solución

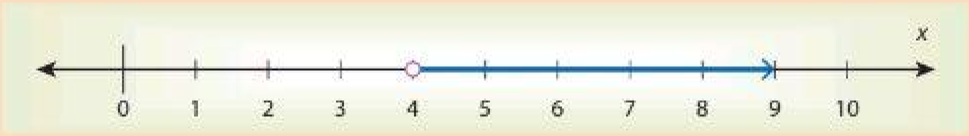
$$2x - 5 > 3$$

Sumamos 5 a cada miembro de la desigualdad: $\quad 2x - 5 + 5 > 3 + 5$

Y realizamos operaciones: $\quad 2x > 8$

Dividimos ambos miembros de la desigualdad entre 2: $\quad x > 4$

La solución es entonces el segmento formado por todas las $x > 4$, se encuentra al lado derecho de 4 y el extremo no se incluye.



Este segmento o intervalo de recta lo podemos escribir como $(4, \infty)$.

Ejercicio

1. Resuelve la desigualdad $4x - 5 > 3$.

Ejemplos

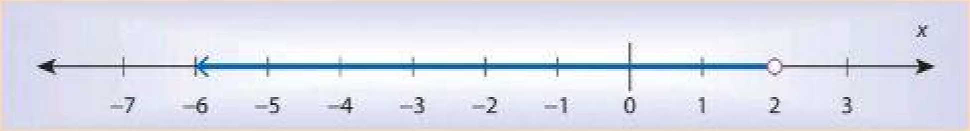
1. Resuelve la desigualdad: $8 - 2x > 4$.

   Solución

	$8 - 2x > 4$
Sumamos -8 a cada miembro de la desigualdad:	$8 - 2x - 8 > 4 - 8$
	$-2x > -4$
Dividimos ambos miembros de la desigualdad entre -2:	$x < 2$

   Por ser un divisor negativo la desigualdad se invierte.

2. En forma de intervalo $(-\infty, 2)$:

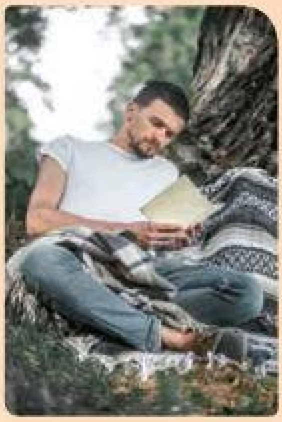


Ejercicio

Resuelve la desigualdad $18 - 2x > 4$.

Ejemplos

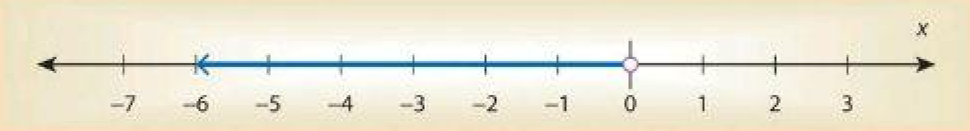
1. Resuelve la desigualdad $4x - 2 > 8x - 2$.



   Solución
   Utilicemos el lado izquierdo de la desigualdad para acumular las x.

	$4x - 2 > 8x - 2$
Restamos $4x$ a ambos lados de la desigualdad:	$4x - 2 - 4x > 8x - 2 - 4x$
Operamos:	$-2 > 4x - 2$
Sumamos 2:	$0 > 4x$
Dividimos entre 4:	$0 > x$

2. En forma de intervalo $(-\infty, 0)$:



Ejercicios

I. Resuelve la desigualdad $5x - 3 > 8x - 6$.

II. Resuelve las siguientes desigualdades, representa el resultado en forma gráfica y utilizando la notación de intervalos.

1. $2x - 3 < 4$
2. $6x + 2 > 4$
3. $7x - 3 > 6$
4. $6x + 4 > -7$
5. $8x - 9 < -5$
6. $\frac{3}{2}x - 5 > 4$
7. $\frac{4}{3}x + \frac{1}{5} < 1$
8. $\frac{6}{5}x - \frac{1}{3} > 2x + 3$
9. $x - 4 > 2x + 3$
10. $4x + \frac{2}{5} > 6x - 1$
11. $4x - 3 < 5$
12. $3x - 4 > 5$
13. $6x - 5 < -3$
14. $4x - 7 > 9$
15. $9x + 5 > -6$
16. $\frac{6}{7}x - 4 > 7$
17. $\frac{2}{3x} + \frac{3}{4} < 4$
18. $\frac{6}{5}x + \frac{1}{3} > \frac{4}{3}$
19. $4x - 5 > 6x + 3$
20. $4x - 2 > 8x - 2$

Valor absoluto en ecuaciones de primer grado

Recordemos la definición de valor absoluto en los números enteros,

$$|x| = \begin{Bmatrix} a & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -a & \text{si } x < 0 \end{Bmatrix}$$

Cuando trabajamos con el valor absoluto encontramos tres situaciones: que el valor absoluto sea igual, mayor o menor que un cierto valor p. Dicha propiedad recibe el nombre de tricotomía.

En símbolos tenemos:

Caso I	Caso II	Caso III
$\lvert x\rvert = p$	$\lvert x\rvert > p$	$\lvert x\rvert < p$

Caso I

Analicemos $\quad |x| = p$

Si $x = 5$, escribimos que el valor absoluto de 5 es 5 $\qquad |5| = 5$

Si $x = -5$, escribimos que el valor absoluto de -5 es 5 $\qquad |-5| = 5$

Por eso sabemos que, si el valor absoluto de x es 5, entonces x toma los valores de -5 y 5. En símbolos tenemos:

$$|x| = 5$$

Entonces: $\qquad x = 5 \qquad$ o $\qquad x = -5$

Esto nos lleva a decir en general que el valor absoluto de x es p, entonces $x = p$ o $x = -p$, en símbolos.

$$|x| = p$$

Entonces: $x = p$ o $x = -p$

Ejemplo

Resuelve la siguiente ecuación: $|x - 2| = 5$.

Usando la definición anterior tenemos que:

$x - 2 = 5$ o $x - 2 = -5$

$x = 5 + 2$ o $x = -5 + 2$

$x = 7$ o $x = -3$

A continuación se comprueba si los resultados obtenidos son correctos, esto se realiza sustituyendo el valor obtenido en la ecuación dada.

$|7 - 2| = 5$ $\qquad$ $|-3 - 2| = 5$

Por lo que los dos resultados obtenidos son correctos.

Ejercicio

Resuelve la siguiente ecuación: $|x - 3| = 7$.

Ejemplo

Resuelve la siguiente ecuación: $|x + 2| = 3$.

Mediante la definición de valor absoluto tenemos:

$x + 2 = 3$ o $x + 2 = -3$

$x = 3 - 2$ o $x = -3 - 2$

$x = 1$ o $x = -5$

Comprobación: $|1 + 2| = 3$ $\qquad$ $|-5 + 2| = 3$

A la raíz cuadrada de un número elevado al cuadrado se define como el valor absoluto del número. En símbolos:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

por lo que la ecuación $x^2 = 9$

La podemos resolver como sigue (justifica cada paso) $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ ____________________

$|x| = 3$ ____________________

Entonces: $x = 3$ o $x = -3$ ____________________

Ejercicios

Soluciona las siguientes ecuaciones.

1. $\lvert x\rvert = 3$	**5.** $\lvert 2x - 4\rvert = 3$	**9.** $\lvert x + 9\rvert = 9$
2. $\lvert x + 42\rvert = 3$	**6.** $\lvert x\rvert = 2$	**10.** $\lvert 6x - 3\rvert = 6$
3. $\lvert x - 4\rvert = 3$	**7.** $\lvert x + 2\rvert = 4$	**11.** $\lvert 2x - 3\rvert = 7$
4. $\lvert x + 6\rvert = 6$	**8.** $\lvert x - 2\rvert = 4$	**12.** $\lvert 3 - 2x\rvert = 9$

Caso II

Definición: Si $\lvert x\rvert > p$, entonces $x > p$ o $x < -p$.

El conectivo "o" indica que una de las dos puede suceder.

Ejemplo

Veamos cómo se resuelve la siguiente inecuación: $\lvert x - 2\rvert > 5$.

Usando la definición anterior tenemos que:

	$x - 2 > 5$	o	$x - 2 < -5$
Al despejar a x:	$x > 5 + 2$	o	$x < -5 + 2$
	$x > 7$	o	$x < -3$

Gráficamente tenemos que:

Efectúa la comprobación.

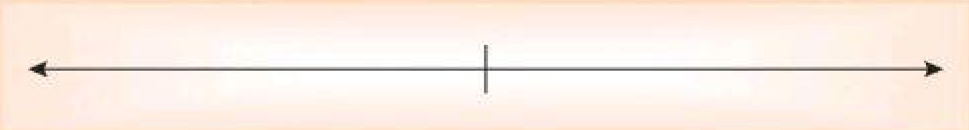
Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $\lvert x + 2\rvert > 3$.

Usando la definición de valor absoluto tenemos:

$x + 2 > 3$	o	$x + 2 < -3$
$x > 1$	o	$x < -5$

Representa el resultado gráficamente.



Ejercicio

Resuelve la siguiente inecuación: $|x - 5| > 4$.

Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $|x - 4| + 5 > 7$.

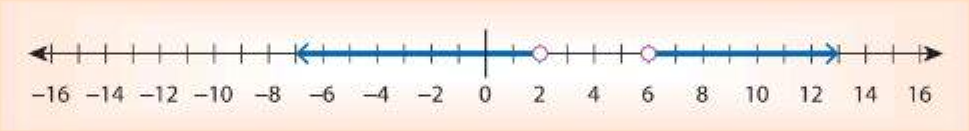
Despejamos al valor absoluto (dejemos solo), en un miembro de la igualdad, al valor absoluto:

$$|x - 4| > 7 - 5$$
$$|x - 4| > 2$$

Usa la definición: $x - 4 > 2$ o $x - 4 < -2$

$x > 6$ o $x < 2$

Representa el resultado gráficamente.



Efectúa la comprobación.

Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $|2x - 4| + 5 > 7$.

Despejemos al valor absoluto.

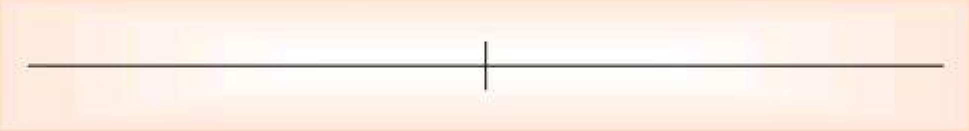
$$|2x - 4| > 7 - 5$$
$$|2x - 4| > 2$$

Usa la definición: $2x - 4 > 2$ o $2x - 4 < -2$

$2x > 6$ o $2x < 2$

$x > 3$ o $x < 1$

Representa el resultado gráficamente.



Efectúa la comprobación.

Ejercicio

Soluciona la siguiente inecuación: $|2x - 2| + 3 > 11$.

Ejemplos

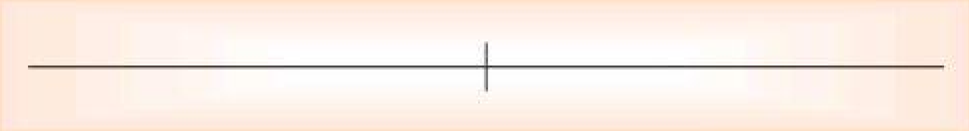
1. Resuelve la siguiente inecuación: $|x + 2| > -3$.

Solución

Usa la definición de valor absoluto y tenemos:

$x + 2 > -3$	o	$x + 2 < -(-3)$
$x > -3 - 2$	o	$x < 3 - 2$
$x > -5$	o	$x < 1$

Representa el resultado gráficamente.



Las soluciones obtenidas son de la inecuación, ya que se pregunta cuándo el valor absoluto es mayor que -3 y eso siempre sucede.

2. Resuelve la siguiente desigualdad: $x^2 - 14 > 11$

$$x^2 > 11 + 14$$
$$x^2 > 25$$
$$\sqrt{x^2} > \sqrt{25}$$
$$|x| > 5$$

Entonces: $x > 5$ o $x < -5$

Ejercicio

Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $|x| > 3$
2. $|x| > 9$
3. $|x| > -8$
4. $|x| > 0$
5. $|x + 4| > 13$
6. $|x - 4| > 4$
7. $|x + 6| > 46$
8. $|x - 10| > 55$
9. $|x - 4| + 2 > 33$
10. $|x + 8| - 7 > 55$
11. $|x - 4| - 9 > 0$
12. $|2x - 4| > 35$
13. $|3x - 7| > -84$
14. $|8x - 15| - 4 > 29$
15. $|x| > 7$
16. $|x| > 15$
17. $|x| > -28$
18. $|x| > 30$
19. $|x + 2| > 4$
20. $|x - 2| > 5$
21. $|x + 9| > 9$
22. $|x - 13| > 13$
23. $|x - 3| + 3 > 24$
24. $|x + 7| - 8 > 95$
25. $|x - 15| - 14 > 48$
26. $|6x - 3| > 66$
27. $|4x - 5| > -99$
28. $|7x - 14| - 8 > 16$
29. $|x| > 38$
30. $|x| > 92$
31. $|x| > -84$
32. $|x| > 540$
33. $|3 - 6x| - 2 > 10$

Caso III

Definición: Si $|x| < p$, entonces: $x < p$ y $x > -p$. Esta definición la aplicaremos usando las propiedades de la desigualdad.

El conectivo "y" indica que las dos condiciones se deben de cumplir.

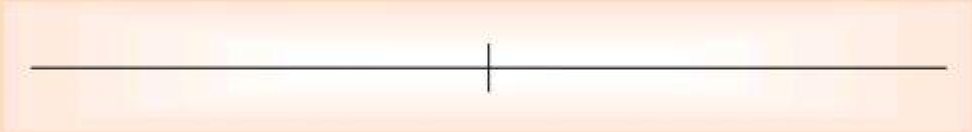
Ejemplo

Veamos cómo se resuelve la siguiente inecuación: $|x - 2| < 5$.

Solución
Usando la definición anterior tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} x - 2 < 5 & \text{y} & x - 2 > -5 \\ x < 5 + 2 & \text{y} & x > -5 + 2 \\ x < 7 & \text{y} & x > -3 \end{array}$$

Representa el resultado gráficamente.



Observa que la solución es donde se montan las gráficas en el intervalo $(-3, 7)$.

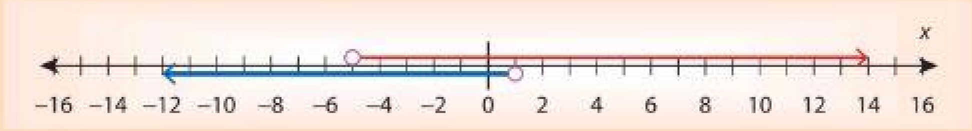
Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $|x + 2| < 3$.

Solución
Usa la definición de valor absoluto y tenemos:

$$\begin{array}{ccc} x + 2 < 3 & \text{y} & x + 2 > -3 \\ x < 1 & \text{y} & x > -5 \end{array}$$

Representa gráficamente.

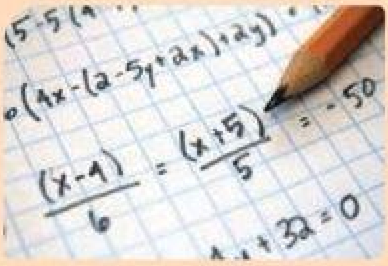


Las que cumplen con la condición son las x que están entre -5 y 1 en forma de intervalo $(-5, 1)$.

Efectúa la comprobación.

Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $|x - 4| + 5 < 7$.



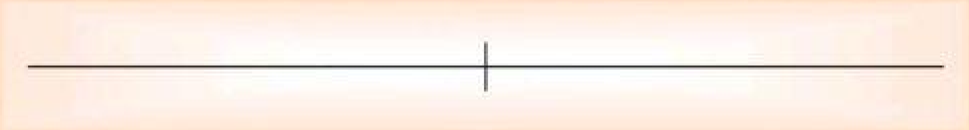
Dejamos solo, en un miembro de la igualdad, al valor absoluto.

$$|x - 4| < 7 - 5$$
$$|x - 4| < 2$$

Usa la definición: $x - 4 < 2$ y $x - 4 > -2$

$x < 6$ y $x > 2$

Representa el resultado gráficamente.



Efectúa la comprobación.

Ejercicio

Soluciona la siguiente inecuación: $|x - 6| + 9 < 12$.

Ejemplo

Resuelve la siguiente inecuación: $|2x - 4| + 5 < 7$.

Dejemos solo, en un miembro de la igualdad, al valor absoluto:

$$|2x - 4| < 7 - 5$$
$$|2x - 4| < 2$$

Usa la definición: $2x - 4 < 2$ y $2x - 4 > -2$

$2x < 6$ y $2x > 2$

$x < 3$ y $x > 1$

Efectúa la comprobación analítica y gráficamente.

Ejercicio

Resuelve la siguiente inecuación: $|3x - 6| + 9 < 27$.

Ejemplo

Soluciona la siguiente inecuación: $|x + 2| < -3$.

Vemos por simple inspección, no se cumplirá la definición de valor absoluto.

¿Por qué? ______________________________

____

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones y desigualdades.

1. $|x| = 3$
2. $|x| = 9$
3. $|x| = -8$
4. $|x| = 0$
5. $|x + 8| = 3$
6. $|x - 5| = 7$
7. $|x + 4| = 4$
8. $|x + 68| = 3$
9. $|x + 9| = 3$
10. $|x + 55| = 3$
11. $|x| > 3$
12. $|x| > 9$
13. $|x| > -8$
14. $|x| > 0$
15. $|2x + 158| > 3$
16. $|2x - 5| > 9$
17. $|3x + 3| > 2$
18. $|3x + 18| > 3$
19. $|4x + 23| > 3$
20. $|4x + 35| > 3$
21. $|x| < 3$
22. $|x| < 9$
23. $|x| < -8$
24. $|x| < 0$
25. $|3x + 158| + 6 < 3$
26. $|3x - 188| + 5 < 1$
27. $|4x + 14| - 6 < 3$
28. $|4x + 45| - 4 < 3$
29. $|5x + 66| + 6 < 3$
30. $|5x + 37| - 8 < 20$

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

Lee el artículo que aparece en el siguiente link:

http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm

Actividades a realizar

1. Lee el artículo y escribe las palabras que no entiendas, busca su significado.
2. Contesta las preguntas que se plantean.
   a) ¿Cuál es el tema central del artículo?
   b) ¿Cuándo nace el cálculo diferencial?
   c) ¿A quiénes se les considera los inventores del cálculo diferencial?
   d) ¿Cuáles fueron los cuatro problemas científicos para el cual fue desarrollado el cálculo diferencial?
   e) ¿Cuáles fueron los enfoques del trabajo de Gottfried Wilhelm Leibniz?
   f) ¿Cuáles fueron los enfoques del trabajo de Issac Newton?
   g) ¿Cuáles fueron las contribuciones de los hermanos Bernoulli?
   h) Nombra los discípulos de Newton y de Leibniz.
   i) ¿Quién define el término función?

CIERRE

EVALUACIÓN SUMATIVA

Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $x^2 + 2x + 1 > 9$

2. $6x^2 + 4x + 4 > 36$

3. $(x - 4)\ (x + 3) > 0$

4. $(x - 3)(x + 2) < 0$

5. $\dfrac{2}{(x - 1)^2} \geq 0$

6. $\dfrac{x^2 - 1}{(x + 2)^3} > 0$

7. $|x + 4| < 5$

8. $|2x - 3| > 4$

9. $\left|\dfrac{2x - 1}{1 - x}\right| > 3$

10. $x^2 - 2x + 1 > 4$

11. $x^2 - 6x + 9 > 25$

12. $(x - 2)(x + 1) > 0$

13. $(x - 9)(x + 1) > 0$

14. $\dfrac{3}{(x + 2)^2} \geq 0$

15. $\dfrac{x^2 - 4}{(x + 4)^2} > 0$

16. $|x + 7| < 4$

17. $|4x - 5| \leq 9$

18. $\left|\dfrac{2x - 1}{1 - x}\right| < x - 3$

1. AUTOEVALUACIÓN

Aspecto a evaluar	Excelente	Bueno	Regular	Satisfactorio
Realicé los ejercicios correctamente	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Trabajé en equipo	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Actividad integradora (ver puntaje)	Valor: 10 puntos	Valor: 7 puntos	Valor: 4 puntos	Valor: 2 puntos
Lectura	Contesté correctamente más de 90% de las preguntas Valor: 5 puntos	Contesté correctamente entre 80 y 89% de las preguntas Valor: 4 puntos	Contesté correctamente entre 70 y 79% de las preguntas Valor: 3 puntos	Contesté correctamente menos de 70% de las preguntas Valor: 2 puntos
Trabajo extraclase	Realicé todas las tareas Valor: 5 puntos	Realicé 80% de las tareas Valor: 4 puntos	Realicé 60% de las tareas Valor: 3 puntos	Realicé 50% de las tareas Valor: 2 puntos
Suma de puntos por columna				
Total de las columnas	De 45 a 50 puntos	De 40 a 44 puntos	De 35 a 39 puntos	Menos de 35 puntos

2. AUTOEVALUACIÓN DISCIPLINAR

Revisa la actividad. Contesta el dominio que tienes de los siguientes conceptos.

Concepto	Lo domino	No lo domino
¿Qué conjuntos forman los números reales?		
¿Qué es un intervalo?		
¿Para qué nos sirven los intervalos?		
¿Cuáles son las propiedades de las desigualdades?		

PARTE 1

EJE

Pensamiento y lenguaje variacional

PRIMERA **PARTE**

A continuación se presentan los elementos que definen el trabajo que vamos a realizar en este Eje.

Componentes

- Cambio y predicción: elementos del Cálculo.

Contenido central

- **Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición.** Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.

Contenidos específicos

1.1 El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio? ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué la variación?

1.2 Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?

Aprendizajes esperados

- Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.
- Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.
- Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.

Productos esperados

- Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas.
- Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico.
- Establecer conjeturas del tipo, ¿cómo serán las sumas de funciones crecientes?

APERTURA

Evaluación diagnóstica

1. Realiza la siguiente operación: $\dfrac{2 \times 3 - 5 + 4 \times 3}{2 - 5 \times 4} =$ ( )

   a) $-\dfrac{3}{9}$ *b*) $\dfrac{3}{9}$ *c*) $-\dfrac{13}{18}$ *d*) -1

2. Haz la siguiente operación: $\dfrac{5 - 3 \times 6 + 4}{12 - 3 \times 4}$ ( )

   a) $-\dfrac{9}{36}$ *b*) No está definida *c*) Infinito *d*) 0

3. Resuelva la siguiente desigualdad: $(x - 3) + 5 > 4\,(3) + 5$ ( )

   a) $x > 19$ *b*) $x > 25$ *c*) $x > 35$ *d*) $x > 15$

4. Resuelve la siguiente desigualdad: $\frac{6}{5}x + \frac{1}{3} > \frac{4}{3}$ ( )

a) $x > \frac{18}{15}$ b) $x > \frac{25}{18}$ c) $x > \frac{5}{6}$ d) $x < 1$

5. Una solución de la siguiente desigualdad: $|7x - 14| - 8 > 16$ es: ( )

a) $x > \frac{38}{7}$ b) $x < -\frac{38}{7}$ c) $x > -\frac{7}{10}$ d) $x < -\frac{10}{7}$

6. Si h es distinto de cero entonces el resultado de $\frac{(x + h) - x}{h}$ es: ( )

a) x b) 1 c) h d) $2x$

7. Si h es cero entonces el resultado de $\frac{(x + h) - x}{h}$ es: ( )

a) x b) 1 c) h d) Indeterminado

8. Si h es distinto de cero entonces el resultado de $\frac{\left(\frac{1}{x + h}\right) - \frac{1}{x}}{h}$ es: ( )

a) $\frac{-1}{x(x + h)}$ b) 1 c) $\frac{-1}{x^2}$ d) x^2

9. Una solución de la desigualdad $|7x + 3| - 8 < 16$ es: ( )

a) $x < \frac{38}{7}$ b) $x < \frac{7}{38}$ c) $x < 3$ d) $x > -3$

10. El número π pertenece al conjunto de los números: ( )

a) Naturales b) Enteros c) Racionales d) Irracionales

Tema integrador

Secuencia didáctica

Deduce y aprende

El problema de la caja

Apertura de la actividad

Propósito: Analiza un problema donde se busca un valor máximo.

Requisitos teóricos: Cálculo de volumen de un paralelepípedo.

Equipo y material:
- Escala
- Juego de escuadras
- Tijeras
- Cinta adhesiva transparente
- Hojas de papel bond

Desarrollo de la actividad

1. Se forman equipos de cinco alumnos. Cada miembro del equipo se designa con una letra (A, B, C, D y E) y recorta un rectángulo de 12 por 18 cm de papel bond.
2. Recuerda que esto forma parte de tu portafolio de evidencias.
3. Con cada rectángulo de papel se hará una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando las cejas para formar los lados, de acuerdo con el dibujo y tabla siguiente:

Alumno	Valor de x
A	1 cm
B	2 cm
C	3 cm
D	4 cm
E	5 cm

4. El volumen de la caja para cierto valor de x será: $V =$
5. Cada alumno calcula el volumen de la caja que construyó y llena la tabla siguiente:

Alumno	Valor de x	Volumen
A	1 cm	cm^3
B	2 cm	cm^3
C	3 cm	cm^3
D	4 cm	cm^3
E	5 cm	cm^3

6. ¿Qué alumno tiene la caja con mayor volumen? ____________________

7. ¿Será ésta la de mayor volumen que se pueda construir? ____________________

Probemos construyendo una caja con $x = 2.5$ cm y calculemos su volumen = ____________________

____

¿Será ésta la de mayor volumen que se pueda construir? ____________________

8. Entre todos los alumnos construyen y calculan el volumen de una caja con $x = 6$.

¿Cuánto vale V __________ para $x = 6$?

¿Cuánto vale V __________ para $x = 0$?

¿Es posible que $x > 6$? ¿Por qué? ____________________

¿Es posible que $x < 0$? ¿Por qué? ____________________

Quizá debemos probar con otros muchos valores de x para calcular los correspondientes valores de V, ¿pero nos ayudaría esto a encontrar el volumen máximo?

Ya que el número de valores posibles para x es infinito no es posible que probemos todos y por tanto, siempre existe la posibilidad de que dejemos fuera el valor buscado; aunque encontremos el valor correcto no tendríamos la certeza de que lo encontramos. En efecto, para saber que un volumen es máximo, es necesario compararlo con todos los demás posibles; como hay un número infinito de ellos, es imposible llevar a cabo esta comparación. Por lo anterior, debe resultar claro que necesitamos un método distinto para encontrar el valor de x que hace que el volumen sea máximo.

Traza la gráfica de la función del volumen e indica si ésta te serviría para determinar el punto más alto en el intervalo. ¿Cómo le llamarías a ese punto?

Cierre de la actividad

9. Utiliza una caja de cerillos sin tapa y comprueba si está hecha utilizando el método de máximos y mínimos.

10. Determina qué temas se trataron en esta secuencia de aprendizaje.

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Formen equipos de cinco alumnos.	• Formen su portafolio de evidencias.	• Escriban en el cuaderno el análisis que hicieron sobre la situación didáctica.
• Lean la secuencia didáctica que se plantea.	• Diseñen los instrumentos para agrupar la información que se requiere. • En equipo discutan las formas de cómo solucionar los problemas. • En equipo contesten las preaguntas que se plantean. • Cada alumno del equipo construye su caja.	• Tracen un mapa mental. • Discutan en equipo la forma en que organizarán el trabajo para resolver el segundo problema, para ello consideren sólo la caja sin tapa. • Traza una gráfica de la ecuación del volumen de la caja.
• Analicen la actividad planteada.	• Analicen la importancia de realizar este tipo de proyectos; anoten sus conclusiones. • Determinen los instrumentos de presentación gráfica. • Recuerden incluirlos en la presentación de la información.	• Tomen fotos del trabajo realizado y anéxenlas a su portafolio de evidencias. • Anoten sus conclusiones.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Documento

Instrumento: Rúbrica

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Análisis de la situación didáctica	Realiza una investigación completa de la situación.	Realiza una investigación clara y convincente.	La investigación no es clara y sólo presenta recortes de páginas web.	La investigación es deficiente y no aporta conocimientos claros.
Desarrollo del tema integrador	Tiene orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones son correctas.	Tiene orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados pero sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados pero sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta no están bien fundamentados y sus conclusiones no son correctas.
Presentación de resultados	Redacta una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son claras. Presenta las cajas construidas.	Redacta una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son escasas. Presenta dos cajas construidas.	Redacta una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, no tiene conclusiones. Presenta dos o menos cajas construidas.	Redacta una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, no tiene conclusiones. No presenta cajas.

Propósito

Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que solucionen problemas surgidos de la actividad humana, tales como la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros, así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

¿Qué aprenderás?

- A resolver problemas de funciones, utilizando para ello las bases de la derivada y la resolución de problemas de optimización.

¿Para qué te servirá?

En la industria, en todo lo que se refiere a resolver un problema de optimización. En las aplicaciones científicas se vuelve una de las herramientas más importantes, como el cálculo de velocidad instantánea, la aceleración, el cálculo de momentos, el trabajo y muchas cosas más.

El arte es una mentira que nos
acerca a la verdad.

Pablo Picasso

DESARROLLO

1.1 El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio? ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiendo del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué la variación?

Dominio y contradominio

Las funciones son un tipo especial de relaciones. Una condición que nos permite saber qué elemento del conjunto B corresponde a un elemento del conjunto A, y en la que a cada elemento de A le corresponde un único elemento en B. A tal relación le llamaremos función de A sobre el conjunto B y se simbolizará por:

$$f : A \longrightarrow B$$

O por:

$$A \xrightarrow{f} B$$

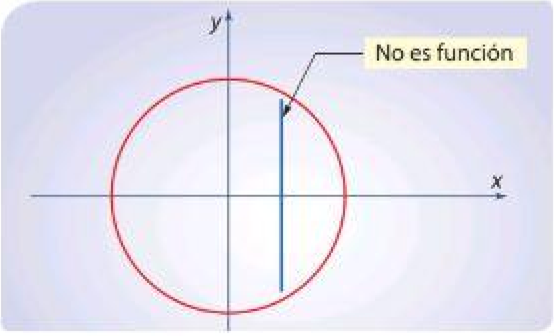
Que leeremos como "función de A en B".

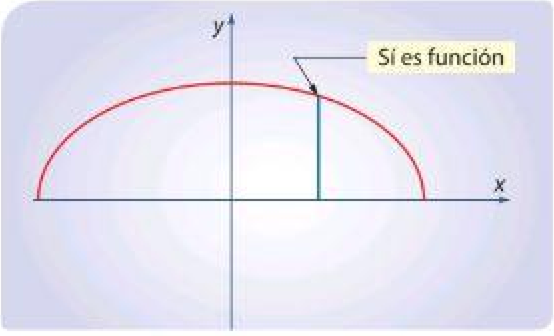
En una función, todo elemento de B correspondiente a un elemento de A recibe el nombre de imagen de A, los elementos "y" de B que son imágenes de elementos "x" de A, se simbolizarán por:

$$y = f(x)$$

Que leeremos como: "y es la imagen de x según la función f" o simplemente por: "y igual a f de x".

Al conjunto de todos los elementos de A que pueden aparecer como primeros elementos de la función f, lo llamamos dominio de f, y lo denotaremos por $D(f)$, mientras que al conjunto de todos los segundos elementos de B que pueden aparecer como segundos elementos de f, lo llamamos contradominio f, y lo denotaremos por $C(f)$. Al conjunto de imágenes se le conoce como rango $R(f)$.





Función: Es la relación que existe entre dos conjuntos, con la condición de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento en el segundo conjunto. El primer conjunto recibe el nombre de dominio y el segundo el de contradominio.

De esta definición, podemos decir que dos pares distintos no tienen el mismo primer componente. Lo que significa que, en la representación gráfica de la función, a cada punto le corresponde diferente abscisa, de manera que al trazar rectas paralelas al eje de las y en los diferentes valores de la x, veremos que cada recta corta a la curva en un único punto; en otras palabras, ninguna recta perpendicular al eje de las x puede intersecar a la gráfica de una función en más de un punto.

Dominio: Es el conjunto donde la función está definida, o sea donde puede tomar sus valores y realizar las operaciones que se indican en dicha relación.

Contradominio: Es el conjunto de todos los resultados que obtenemos al realizar operaciones con los elementos del dominio.

Valor numérico de una función

El conjunto de las imágenes de los elementos del dominio se obtienen al sustituir a la variable x, por cada valor que puede tomar la misma, a esto se le llama valor numérico de la función.

En la función $f(x) = 2x$, las imágenes que se obtienen de los valores de $x = 1, 2, 3$ son:

$f(1) = 2(1) = 2$ "2 es la imagen de 1"

$f(2) = 2(2) = 4$ "4 es la imagen de 2"

$f(3) = 2(3) = 6$ "6 es la imagen de 3"

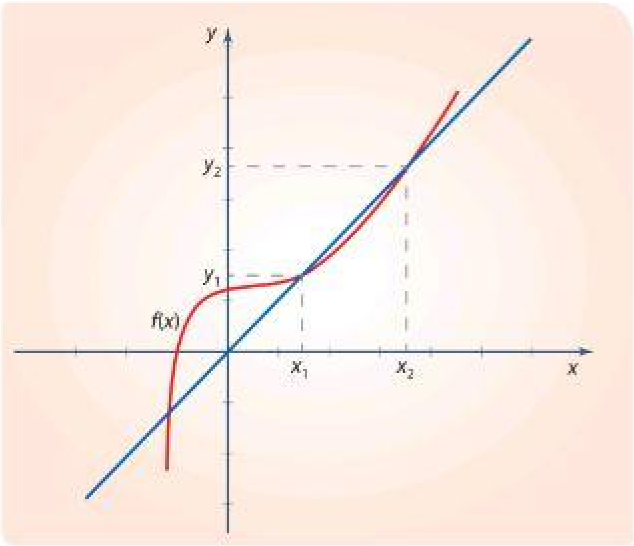
Ejercicio

En la función $f(x) = 2x - 3$, las imágenes que se obtienen de los valores de $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 10$ son:

Recordemos del curso de geometría analítica, la forma como calculamos la pendiente entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gráficamente se tiene:



Observa que dada la curva $f(x)$ determinamos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y lo que hacemos es determinar la pendiente de la recta secante a la curva, lo mismo vamos a hacer si cambiamos la notación. Utilicemos para ello el valor h, otros autores utilizan Δ_x, lo que significa un incremento de la variable x; por ejemplo, si $x = 3$ y $h = 1$, entonces tenemos que el espacio entre x y $x + h$ es de 2.

de las y en los diferentes valores de la x, veremos que cada recta corta a la curva en un único punto; en otras palabras, ninguna recta perpendicular al eje de las x puede intersecar a la gráfica de una función en más de un punto.

Dominio: Es el conjunto donde la función está definida, o sea donde puede tomar sus valores y realizar las operaciones que se indican en dicha relación.

Contradominio: Es el conjunto de todos los resultados que obtenemos al realizar operaciones con los elementos del dominio.

Valor numérico de una función

El conjunto de las imágenes de los elementos del dominio se obtienen al sustituir a la variable x, por cada valor que puede tomar la misma, a esto se le llama valor numérico de la función.

En la función $f(x) = 2x$, las imágenes que se obtienen de los valores de $x = 1, 2, 3$ son:

$f(1) = 2(1) = 2$ "2 es la imagen de 1"

$f(2) = 2(2) = 4$ "4 es la imagen de 2"

$f(3) = 2(3) = 6$ "6 es la imagen de 3"

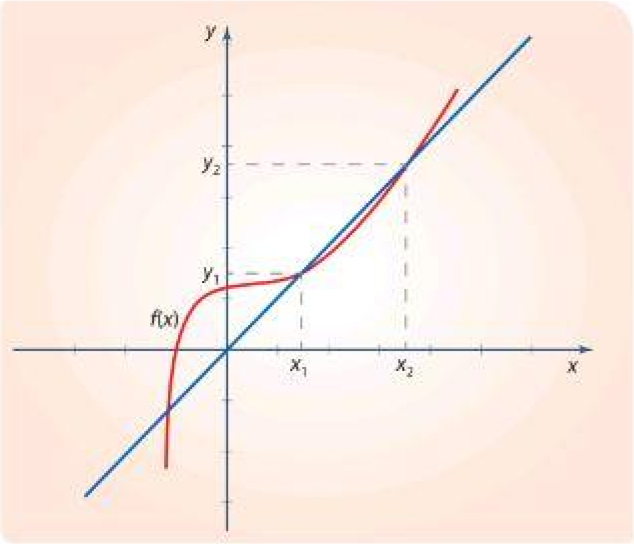
Ejercicio

En la función $f(x) = 2x - 3$, las imágenes que se obtienen de los valores de $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 10$ son:

Recordemos del curso de geometría analítica, la forma como calculamos la pendiente entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

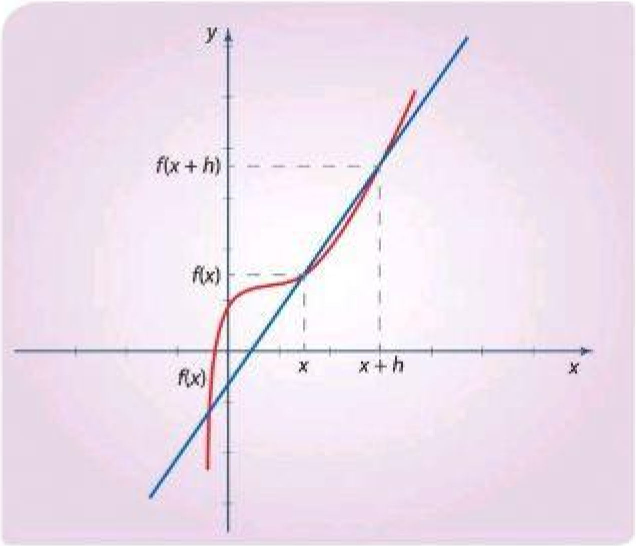
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gráficamente se tiene:



Observa que dada la curva $f(x)$ determinamos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y lo que hacemos es determinar la pendiente de la recta secante a la curva, lo mismo vamos a hacer si cambiamos la notación. Utilicemos para ello el valor h, otros autores utilizan Δ_x, lo que significa un incremento de la variable x; por ejemplo, si $x = 3$ y $h = 1$, entonces tenemos que el espacio entre x y $x + h$ es de 2.

Gráficamente se tiene:

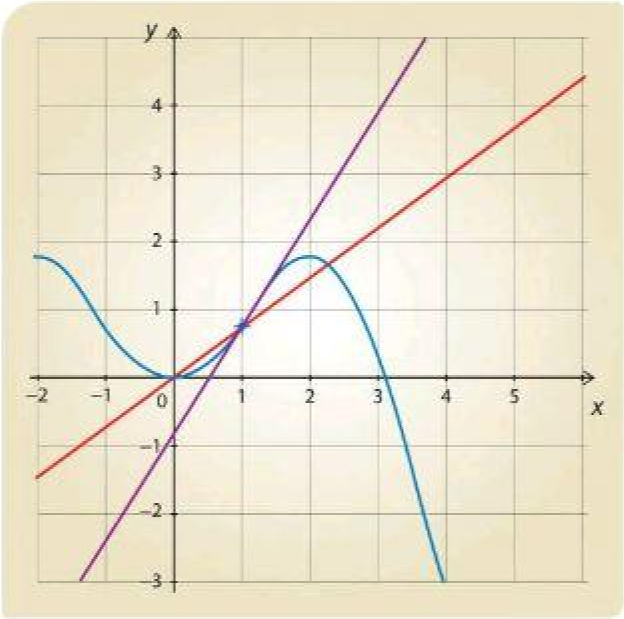


Calculemos la pendiente con esta nueva notación:

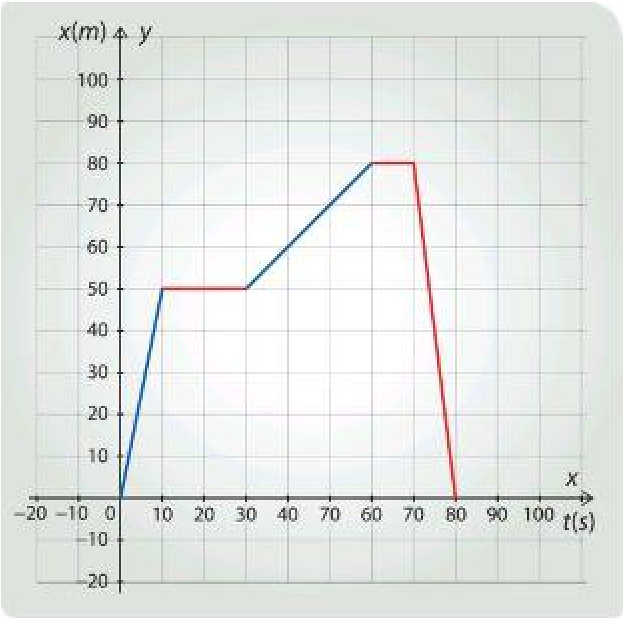
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y tenemos que cuando la h tiende a ser muy pero muy chica entonces tenemos la pendiente de la recta tangente. En la gráfica siguiente puedes observar que las diferentes rectas secantes van acortando su distancia h, hasta que ésta sea muy pequeña.

En el caso de distancia-tiempo, este último. En el eje de las x y el otro en el eje de las y:



Utilicemos lo que sabemos de pendientes y calculemos las distintas velocidades que realizó una persona al salir de su casa y regresar. Para ello numera cada segmento y calcula su pendiente o sea su velocidad.



Gráfica del tiempo y desplazamiento.

$$m_1 = \frac{50 - 0}{10 - 0} = \frac{50}{10} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{velocidad}$$

$$m_2 = \frac{\;-\;}{\;-\;} =$$

$$m_3 = \frac{\;-\;}{\;-\;} =$$

$$m_4 = \frac{\;-\;}{\;-\;} =$$

$$m_5 = \frac{\;-\;}{\;-\;} =$$

El cociente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nos permite calcular la pendiente de la recta secante de cualquier función, lo más importante surge cuando tratamos de que el valor del denominador sea muy pequeño, ya que eso nos permitirá conocer la pendiente de la recta tangente a la curva o sea la velocidad instantánea. En los siguientes párrafos nos dedicaremos al estudio de este tema.

Dedicaremos nuestra atención a algo muy especial en este curso, encontrar el valor del siguiente cociente, cuando $h \to 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h};\; h \neq 0$$

$h = \Delta x$, un incremento

Para ello empecemos por encontrar $f(x + h)$ para la función $f(x) = 2x$.

Esto quiere decir que en lugar de x lo sustituimos por $x + h$ y realizamos operaciones.

$$f(x+h) = 2(x+h) = 2x + 2h$$

Obtener $f(x+h) - f(x)$; para la función $f(x) = 2x$:

$$f(x+h) - f(x) = 2x + 2h - 2x = 2h$$

Esto lo podemos realizar por pasos o en forma directa como se muestra a continuación.

Encuentra $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $h \neq 0$; para la función $f(x) = 2x$.

Para encontrar $f(x+h)$, se sustituye $x + h$ en lugar de cada x.

Sustituimos en: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2x + 2h - 2x}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$ con $h \neq 0$

¿Qué sucede si $h = 0$? ____

____

Ejemplo

Determina el valor del cociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $h \neq 0$; para la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Solución:

$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $h \neq 0$ para la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Lo puedes realizar paso a paso: $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$f(x+h) =$

O en forma directa como se detalla a continuación:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 5 - (3x^2 - 2x + 5)}{h}$$

$$= \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 5 - 3x^2 + 2x - 5}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5 - 3x^2 + 2x - 5}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 2h}{h}$$

$$= \frac{h(6x + 3h - 2)}{h}$$

Como $h \neq 0$ tenemos: $= 6x + 3h - 2$

Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios siguiendo las instrucciones que se te dan.

Encuentra $f(1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(x+h)$ y $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $h \neq 0$, para las siguientes funciones:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x - 2$
3. $f(x) = 3x - 4$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = 3x^2 - 3x$
6. $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
9. $f(x) = \dfrac{3}{4x+2}$
10. $f(x) = \sqrt{x}$
11. $f(x) = 5x$
12. $f(x) = x - 4$
13. $f(x) = 4x - 5$
14. $f(x) = 2x^2$
15. $f(x) = x^2 - 4$
16. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$
17. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
18. $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$
19. $f(x) = \dfrac{6}{2x+3}$
20. $f(x) = \sqrt{x} + x$

Clasificación de funciones

Existen diferentes tipos de funciones, las cuales clasificaremos a continuación para tener una idea clara de ellas:

$$\text{Función} \begin{cases} \text{Algebraicas} \begin{cases} \text{Polinómicas} \\ \text{Racionales} \\ \text{Radicales} \end{cases} \\ \text{Trascendentes} \begin{cases} \text{Trigonométricas} \\ \text{Exponenciales} \\ \text{Logarítmicas} \end{cases} \end{cases}$$

Funciones polinómicas: Son aquéllas formadas por un polinomio.

Funciones racionales: Son las que se forman por un cociente de dos polinomios con la condición de que el divisor no sea el polinomio cero.

Ejemplo

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

Donde las operaciones que se pueden realizar son todas, excepto cuando el denominador es cero, por lo que el dominio de la función son todos los números reales menos el 2.

Funciones radicales: Son aquéllas donde un polinomio se encuentra dentro de un radical.

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{3x - 4}$$

Funciones trigonométricas: Son las que se obtienen de la comparación por cociente de los lados de un triángulo y éstas, son función del ángulo (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante).

Ejemplo

$$f(x) = \text{sen}\,(2x - 3)$$

Funciones exponenciales: Son aquéllas donde el exponente varía.

Ejemplo

$$y = 3^{x-1}$$

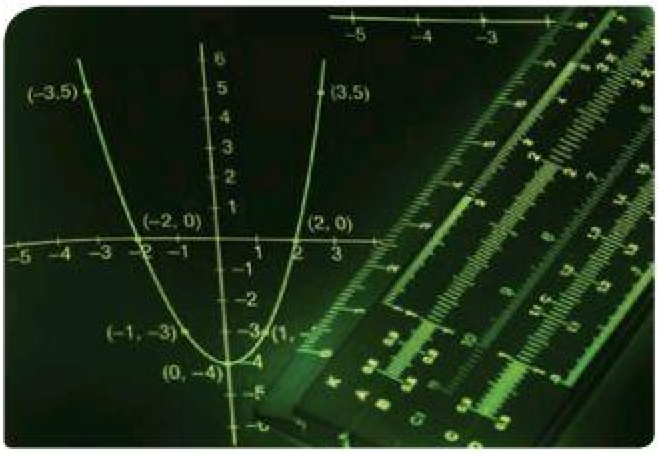
Funciones logarítmicas: Son las funciones donde encontramos los logaritmos de diferentes bases. Estas funciones son las inversas de la función exponencial.

Ejemplo

$$y = \log_3 (2x - 7)$$

1.2 Interualos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?

Comportamiento de funciones



Función creciente y función decreciente y máximos y mínimos

Una función $y = f(x)$ para la cual un incremento en el valor de x resulta siempre un incremento en el valor de y, esto es, si $f(x) < f(x + h)$ siempre que $x < x + h$, se denomina función monótona creciente. Si el incremento en el valor de x implica una disminución en el valor de y, es decir, si $f(x) > f(x + h)$ siempre que $x < x + h$, la función es monótona decreciente.

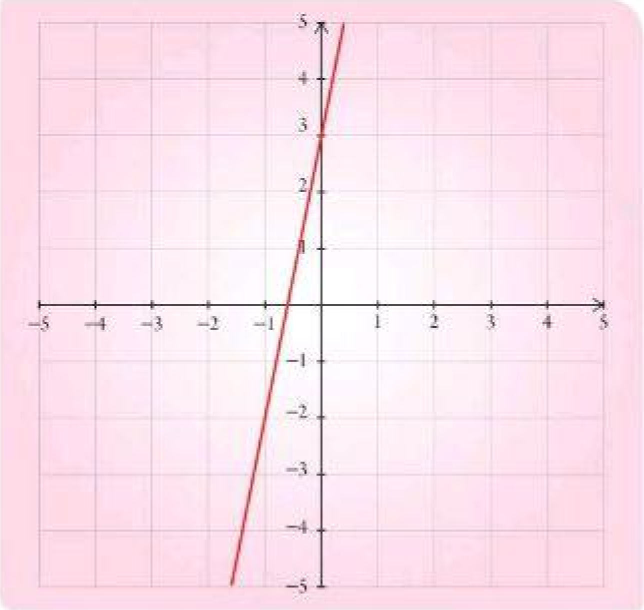
Tales funciones se representan gráficamente por curvas que siempre ascienden o bien descienden conforme x recorre el intervalo permitido hacia valores crecientes.

Gráfica de una función

Realicemos la gráfica de la función $f(x) = 5x + 3$ siguiendo los siguientes pasos:

Primer paso. Se evalúa la función lineal en por lo menos dos puntos cualesquiera, si la función es de un grado mayor, es conveniente tomar valores positivos, negativos y el cero, de preferencia son aquellos que resultan fáciles de evaluar. Elegimos los valores −1, 0 y 1, de los cuales obtenemos su valor numérico.

$$f(x) = 5x + 3$$
$$f(-1) = 5(-1) + 3 = -2$$
$$f(0) = 5(0) + 3 = 3$$
$$f(1) = 5(1) + 3 = 8$$



Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	y
−1	−2
0	3
1	8

Tercer paso. Se localizan los puntos en un plano coordenado y se unen por segmentos de recta. Se pueden prolongar los extremos para tener una idea clara de cómo es la recta.

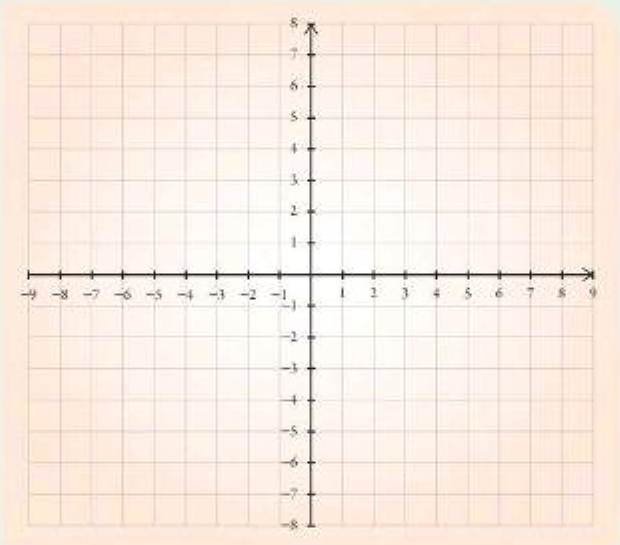
Ejercicio

Realiza la gráfica de la función $f(x) = 4x - 3$.

Solución:

Primer paso. Se evalúa la función lineal en los puntos −1, 0 y 1.

$$f(x) = 4x - 3$$
$$f(-1) =$$
$$f(0) =$$
$$f(1) =$$



Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	y
−1	
0	
1	

Tercer paso. Se localizan los puntos en un plano coordenado y se unen por segmentos de recta. Se pueden prolongar los extremos para tener una idea clara de cómo es la recta.

Ejemplo

Realizar la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x - 5$.

Solución:

Primer paso. Se evalúa la función cuadrática tomando valores positivos, negativos y el cero.

$f(x) = x^2 - x - 5$

$f(-3) = (-3)^2 - (-3) - 5 = 7$

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 5 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 5 = -3$

$f(0) = (0)^2 - (0) - 5 = -5$

$f(1) = (1)^2 - (1) - 5 = -5$

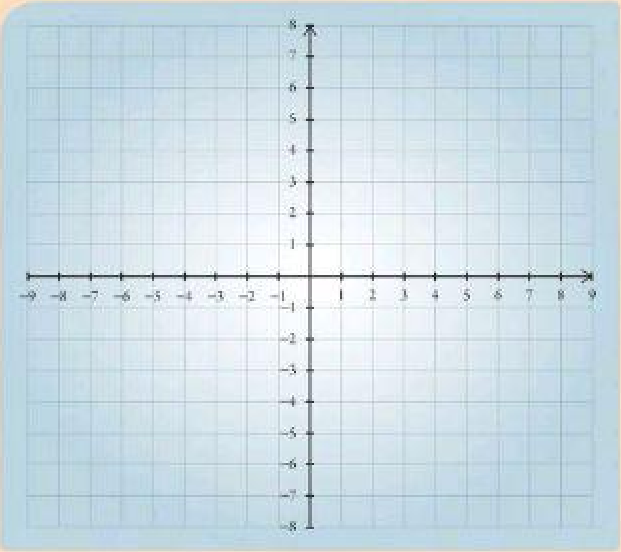
$f(2) = (2)^2 - (2) - 5 = -3$

$f(3) = (3)^2 - (3) - 5 = 1$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

Tabulación de $y = x^2 - x - 5$.

x	$y = f(x)$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	



Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.

Ejercicio

Realiza la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Solución:

Primer paso. Se evalúa la función cuadrática tomando valores positivos, negativos y el cero.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(-3) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

$f(-2) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

$f(-1) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

$f(0) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

$f(1) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

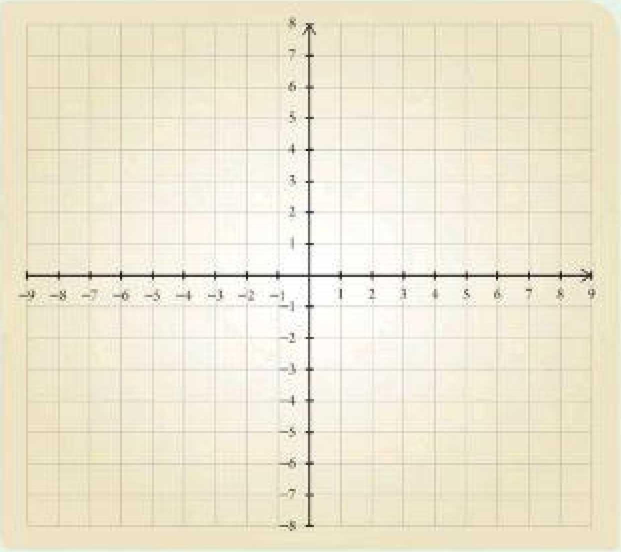
$f(2) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

$f(3) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3 =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

Tabulación de $y = x^2 + 2x - 3$.

x	$y = f(x)$
–3	
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	



Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.

Al proceso descrito se le llama **graficar la función**, y la curva es llamada la gráfica o lugar geométrico de la misma (aunque en realidad es una aproximación a dicha gráfica, ya que la gráfica consiste en todos los puntos, imposible de realizar). Esta representación nos sirve para identificar algunas características o propiedades de la función.

La gráfica de una función satisface que: "Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano".

Ejercicio

Realiza la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 - 2x$.

Solución:

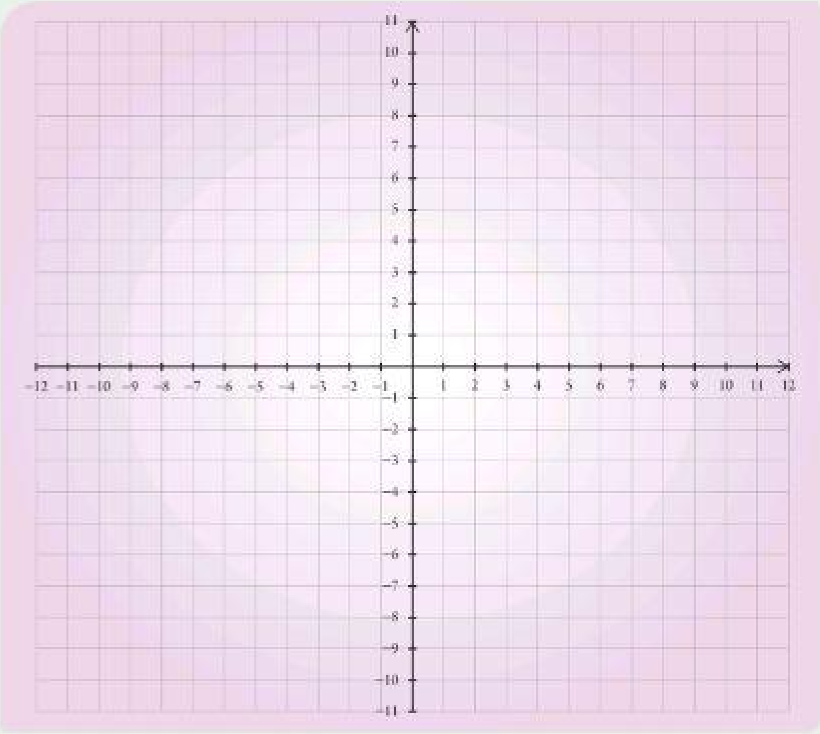
Primer paso. Evalúa la función en –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

$y = (-3)^2 + 2(-3) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$
$y = (\_\_)^2 + 2(\_\_) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye un tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	y
–3	
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ello. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



Ejercicios

1. Cuando una función crece y luego decrece existe un valor, el más grande, que recibe el nombre de _________

   ____

   Cuando una función decrece y luego crece, existe un valor, el más pequeño de todos, que recibe el nombre de

   ____

2. En los siguientes ejercicios:

   a) Realiza la gráfica de la función, traza con azul donde es creciente, rojo donde es decreciente, el punto máximo en color naranja y en color café el valor mínimo.

   b) Calcula el cociente $m = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en tu cuaderno.

Ejercicios

1. Las funciones constantes $f(x) = 5$ $f(x) = -3$ $f(x) = 2$

   Solución:

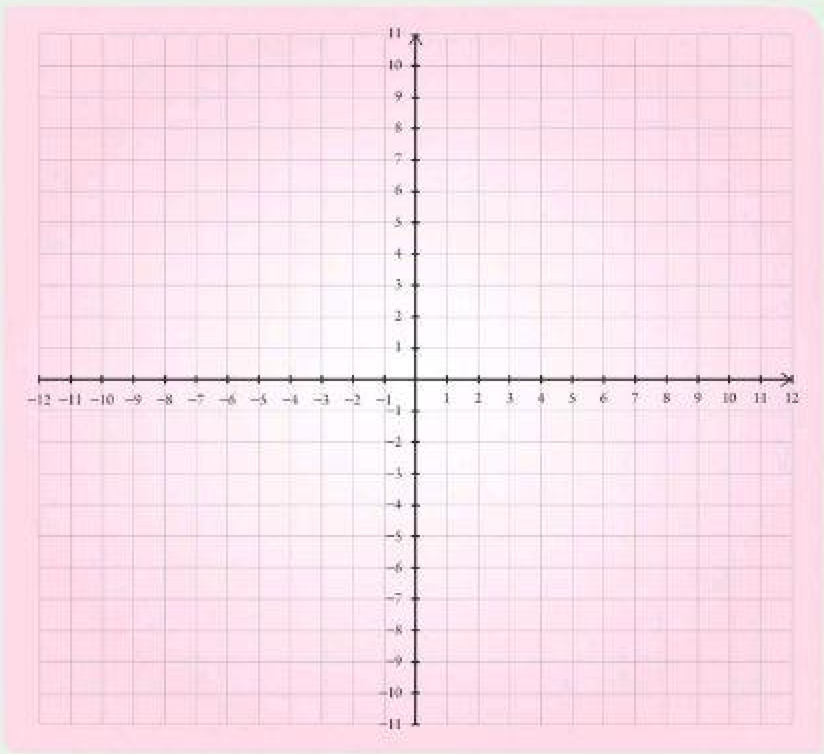
   Primer paso. Evalúa las funciones en –3, 0 y 3.

$y = 5$	$y = -3$	$y = 2$
$f(-3) =$	$f(-3) =$	$f(-3) =$
$f(0) =$	$f(0) =$	$f(0) =$
$f(3) =$	$f(3) =$	$f(3) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	$y = 5$	$y = -3$	$y = 2$
−3			
−2			
−1			
0			
1			
2			
3			

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



2. La función idéntica $f(x) = x$ y $f(x) = -x$; función simétrica.

Solución:

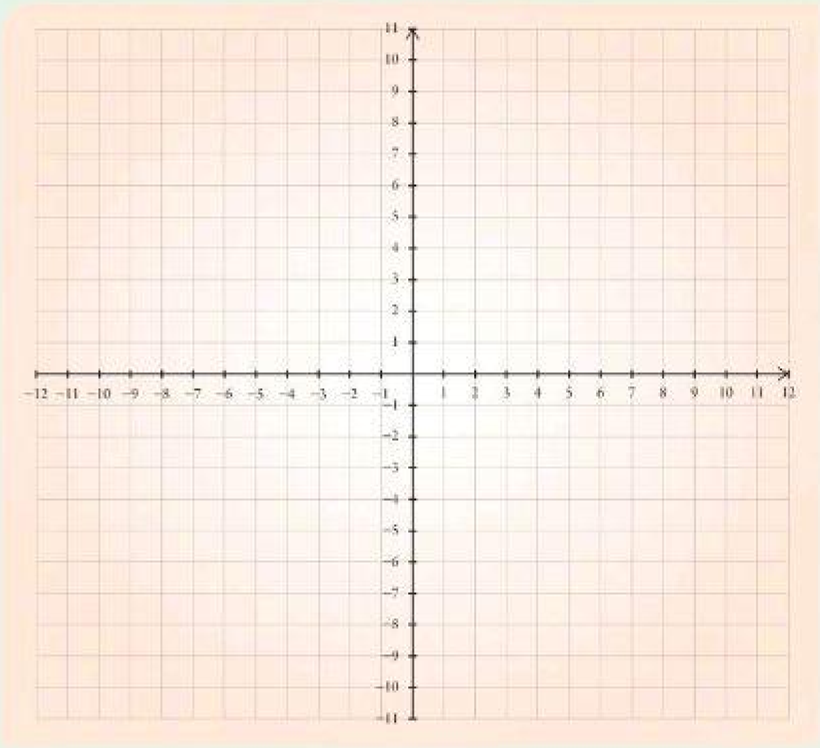
Primer paso. Evalúa las funciones en −3, 0 y 3.

$f(-3) =$ $f(0) =$ $f(3) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye un tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	$y = x$	$y = -x$
−3		
0		
3		

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



3. Cúbica $y = x^3$

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3.

$f(-3) =$ $f(0) =$ $f(3) =$

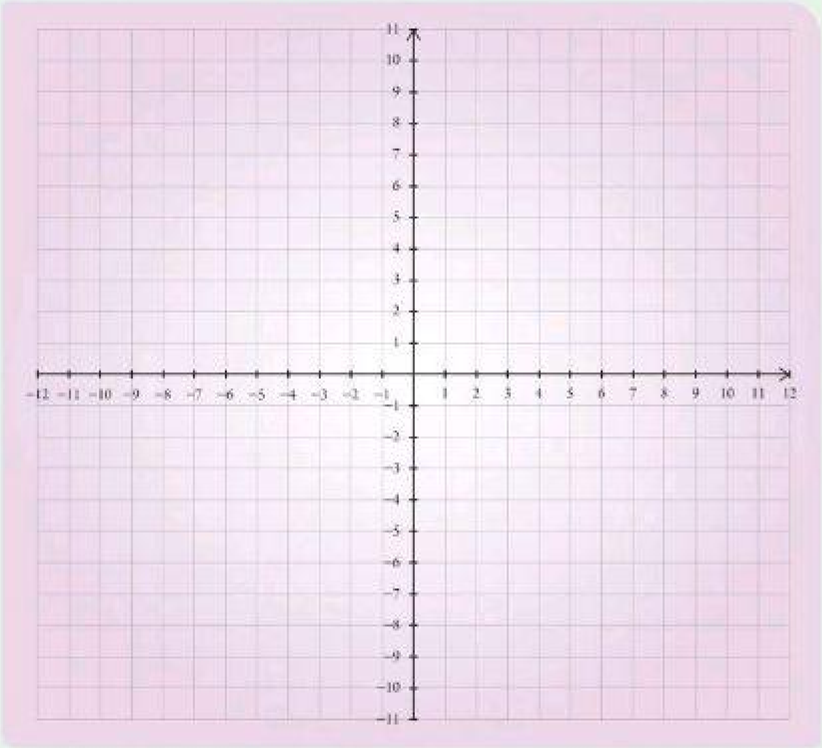
$f(-2) =$ $f(1) =$

$f(-1) =$ $f(2) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de *x* y *y*.

x	*y*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



4. Valor absoluto $y = |x|$

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3.

$f(-3) =$ $f(0) =$ $f(3) =$

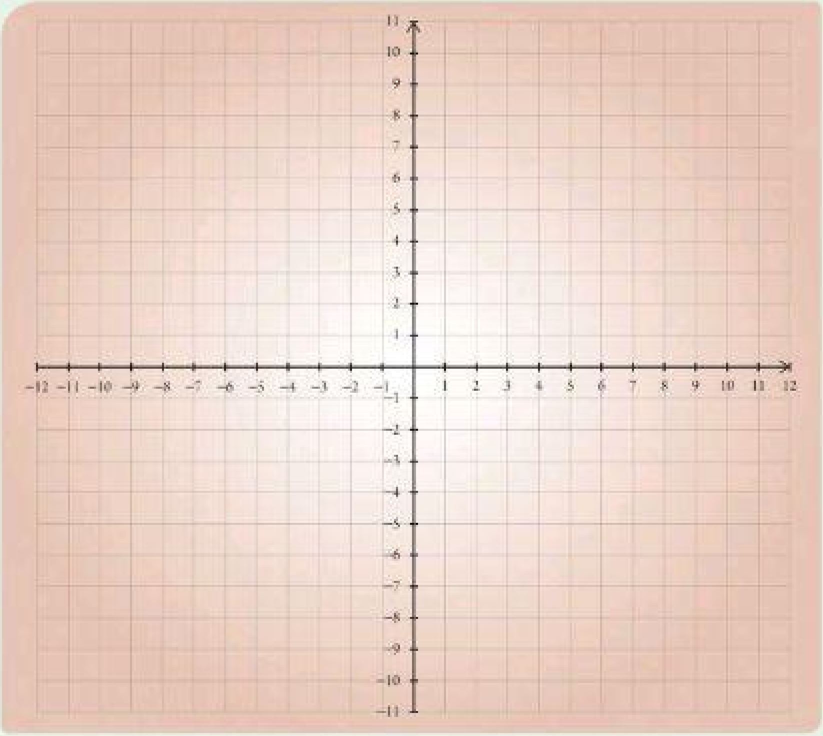
$f(-2) =$ $f(1) =$

$f(-1) =$ $f(2) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	y
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



Funciones trigonométricas

5. Las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$.

Solución:

Primer paso. Utiliza la siguiente tabla: en el tercer renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \text{sen } x$ y cuando la traces utiliza color rojo, en el cuarto renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \cos x$ y utiliza para trazarla color azul. En tus resultados sólo escribe un decimal. En el primer renglón la medida de los ángulos está dada en radianes, en el segundo se utilizan grados sexagesimales de 15° en 15° hasta 360°. Recuerda realizar los ajustes de **modo** en tu calculadora científica.

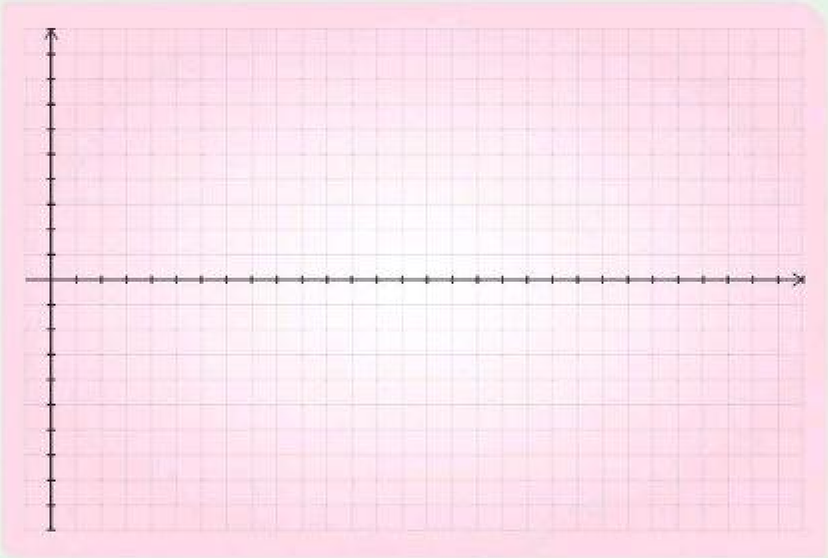
Segundo paso:

x	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$
x	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$f(x) = \text{sen } x$									
$f(x) = \cos x$									

x	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π	$13\pi/12$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$17\pi/12$
x	135	150	165	180	195	210	225	240	255
$f(x) = \text{sen } x$									
$f(x) = \cos x$									

x	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$23\pi/12$	2π	radianes
x	270	285	300	315	330	345	360	grados
$f(x) = \text{sen } x$								
$f(x) = \cos x$								

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



6. Las gráficas de $f(x) = \tan x$ y $f(x) = \cot x$.

Solución:

Primer paso. Utiliza la siguiente tabla: en el tercer renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \tan x$ y cuando la traces utiliza color rojo, en el cuarto renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \cot x$ y utiliza para trazarla color azul. En tus resultados sólo escribe un decimal. En el primer renglón la medida de los ángulos está dada en radianes, en el segundo se utilizan grados sexagesimales de 15° en 15° hasta 360°. Recuerda realizar los ajustes de **modo** en tu calculadora científica.

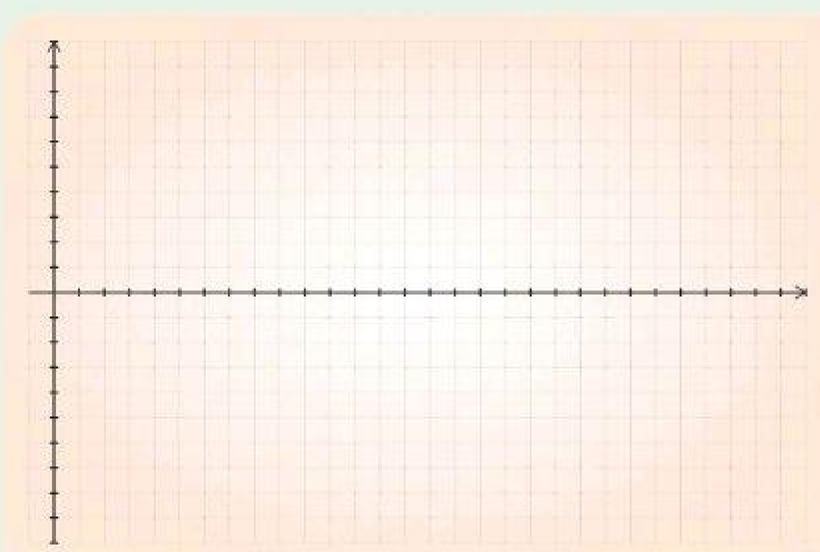
Segundo paso.

x	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$
x	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$f(x) = \tan x$									
$f(x) = \cot x$									

x	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π	$13\pi/12$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$17\pi/12$
x	135	150	165	180	195	210	225	240	255
$f(x) = \tan x$									
$f(x) = \cot x$									

x	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$23\pi/12$	2π	radianes
x	270	285	300	315	330	345	360	grados
$f(x) = \tan x$								
$f(x) = \cot x$								

Tercer paso. Se localizan los puntos en un plano coordenado y se unen por segmentos de recta. Se pueden prolongar los extremos para tener una idea clara de cómo es la curva.



7. Las gráficas de $f(x) = \sec x$ y $f(x) = \csc x$.

Solución:

Primer paso. Utiliza la siguiente tabla, en el tercer renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \sec x$ y cuando la traces utiliza color rojo, en el cuarto renglón escribe los resultados de la función $f(x) = \csc x$ y utiliza para trazarla color azul. En tus resultados sólo escribe un decimal. En el primer renglón la medida de los ángulos está dada en radianes, en el segundo se utilizan grados sexagesimales de 15° en 15° hasta 360°. Recuerda realizar los ajustes de **modo** en tu calculadora científica.

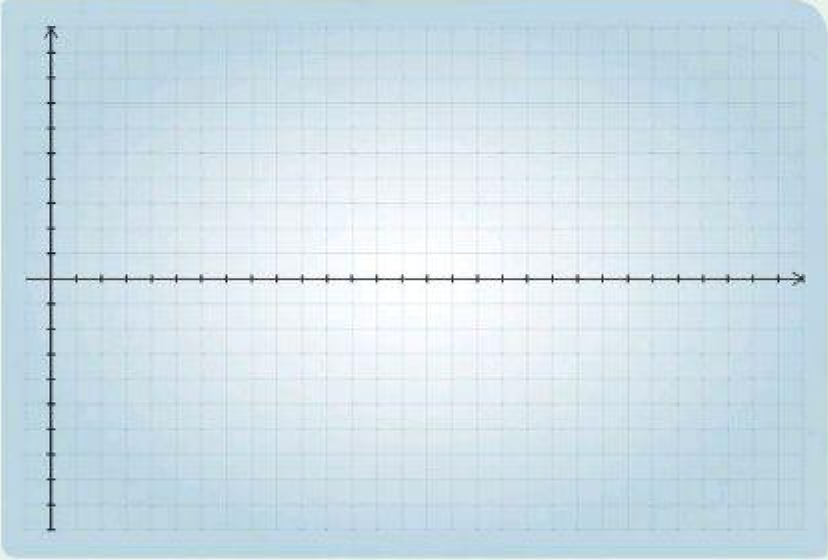
Segundo paso.

x	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$
x	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$f(x) = \sec x$									
$f(x) = \csc x$									

x	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π	$13\pi/12$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$17\pi/12$
x	135	150	165	180	195	210	225	240	255
$f(x) = \sec x$									
$f(x) = \csc x$									

x	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$23\pi/12$	2π	radianes
x	270	285	300	315	330	345	360	grados
$f(x) = \sec x$								
$f(x) = \csc x$								

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



Funciones exponencial (base 2) y logarítmica (base 10)

8. Las gráficas de $f(x) = 2^x$ $f(x) = \log x$

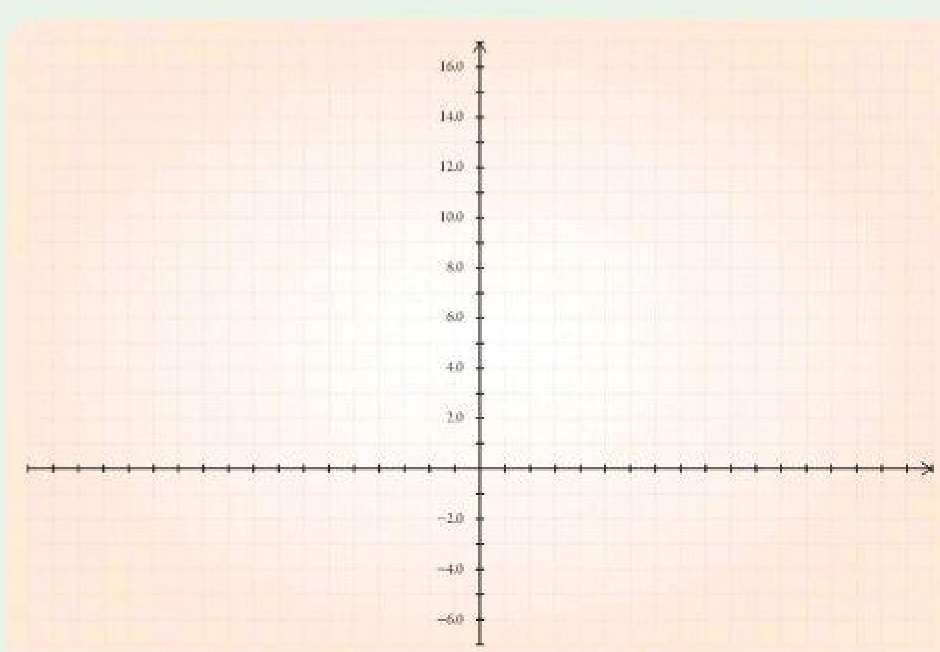
Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −3, −2, −1, 0, 0.3, 0.6, 1, 2, 3 y 4, utiliza tu calculadora.

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.
¿Qué sucede para los valores negativos en las dos funciones?

x	$y = 2^x$	$y = \log x$
−3		
−2		
−1		
0		
0.3		
0.6		
1		
2		
3		
4		

Tercer paso. Se localizan los puntos en un plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva. La primera gráfica trázala con color rojo y la segunda de color azul.



Funciones exponencial (base *e*) y logarítmica (base *e* naturales)

9. Las gráficas de $f(x) = e^x$ $f(x) = \ln x$

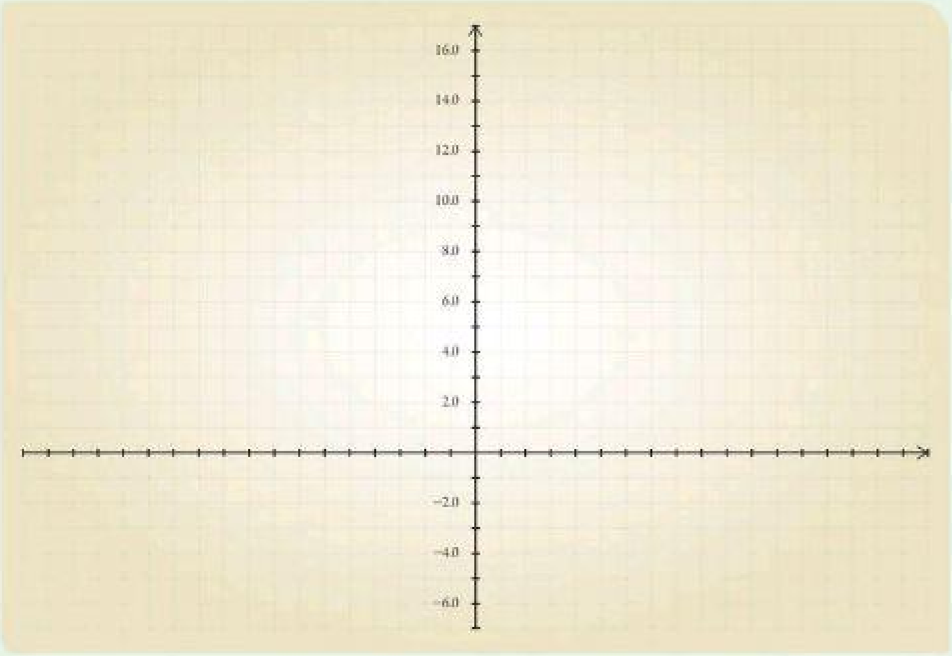
Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −3, −2, −1, 0, 0.3, 0.6, 1, 2, 3 y 4, utiliza tu calculadora.

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de *x* y *y*.
¿Para qué valores la función ln *x* no está definida?

x	$y = e^x$	$y = \ln x$
−3		
−2		
−1		
0		
0.3		
0.6		
1		
2		
3		
4		

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



Función racional

10. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3.

$f(-3) =$ $\quad$ $f(0) =$ $\quad$ $f(3) =$

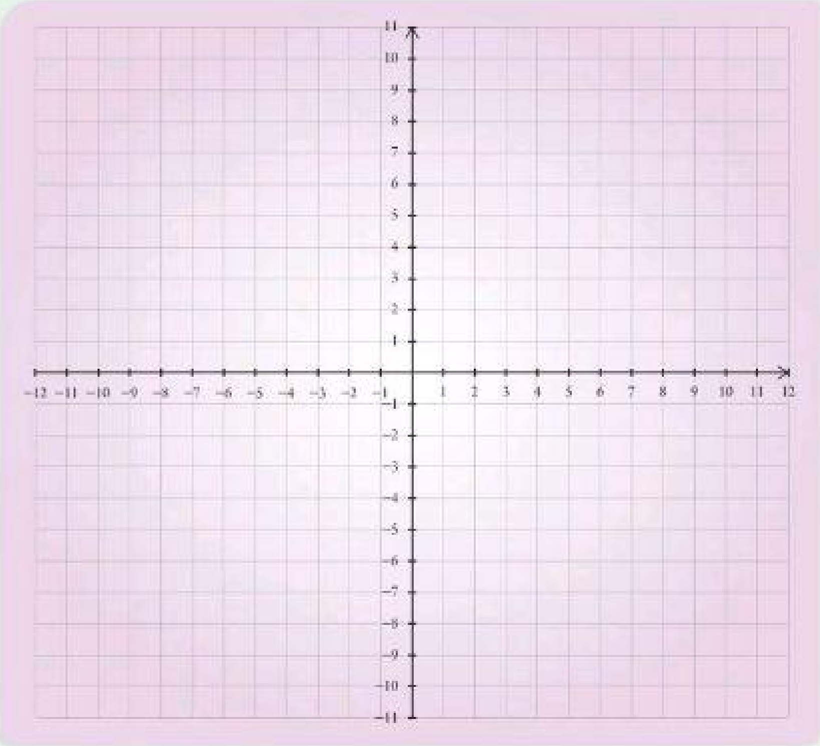
$f(-2) =$ $\quad$ $f(1) =$

$f(-1) =$ $\quad$ $f(2) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de *x* y *y*.

x	*y*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



11. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 y 4.

$f(-4) =$ $\qquad$ $f(-1) =$ $\qquad$ $f(2) =$

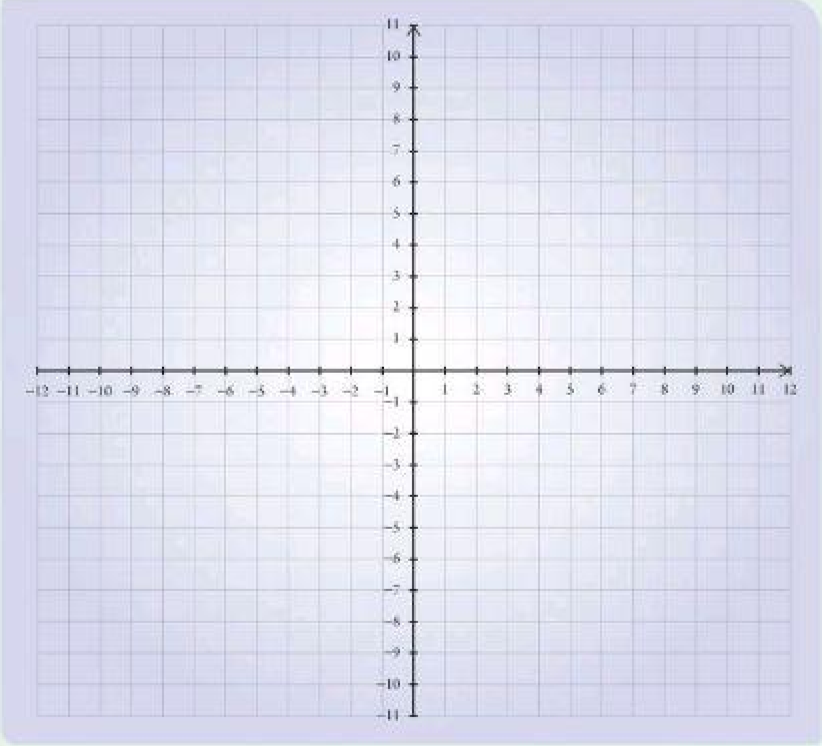
$f(-3) =$ $\qquad$ $f(0) =$ $\qquad$ $f(3) =$

$f(-2) =$ $\qquad$ $f(1) =$ $\qquad$ $f(4) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de *x* y *y*.

x	*y*
−4	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



Función irracional

12. La gráfica de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

$f(-3) =$ $\qquad f(0) =$ $\qquad f(3) =$

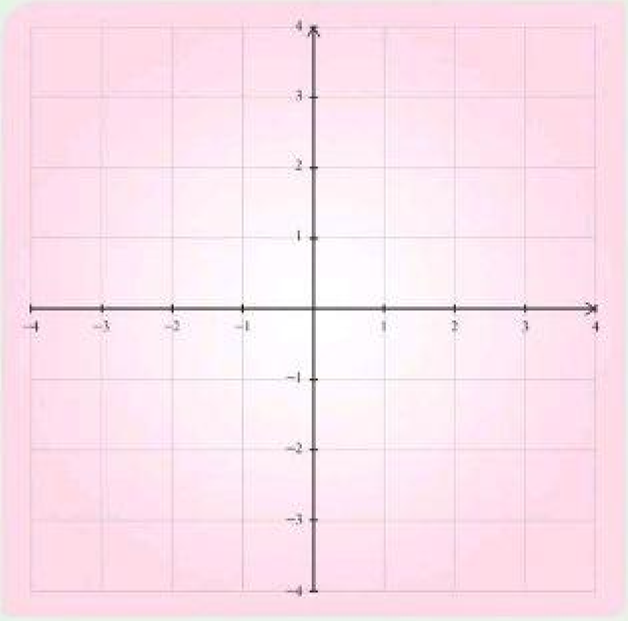
$f(-2) =$ $\qquad f(1) =$

$f(-1) =$ $\qquad f(2) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

x	y
–3	
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	

Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



13. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Solución:

Primer paso. Evalúa las funciones en –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

$f(-3) =$ 　　 $f(0) =$ 　　 $f(3) =$

$f(-2) =$ 　　 $f(1) =$

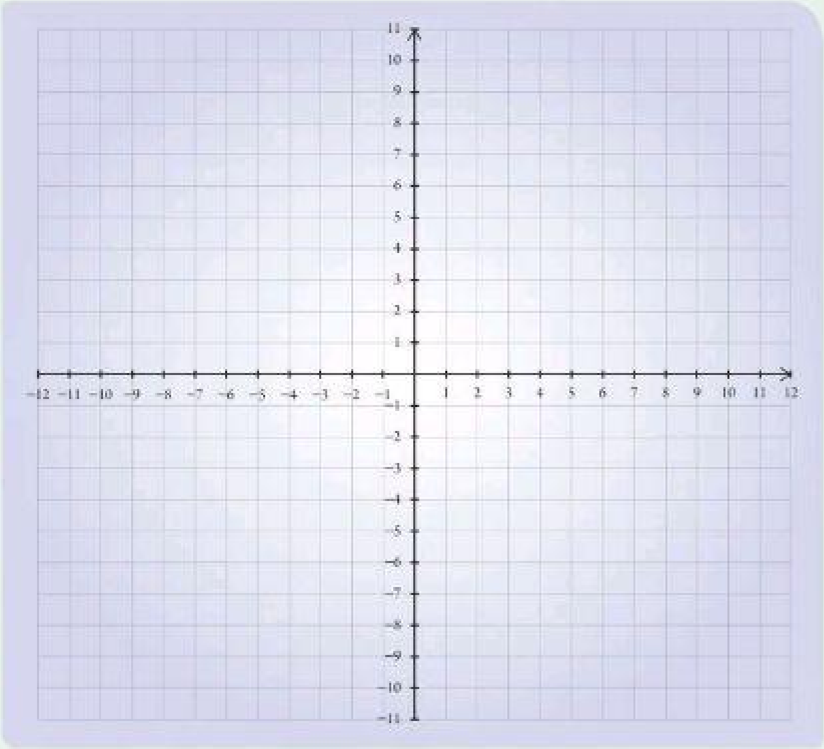
$f(-1) =$ 　　 $f(2) =$

Segundo paso. Con estos valores se construye una tabla, donde se agrupan los valores de x y y.

¿Para qué valores de x no está definida la función?

x	y
–3	
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	

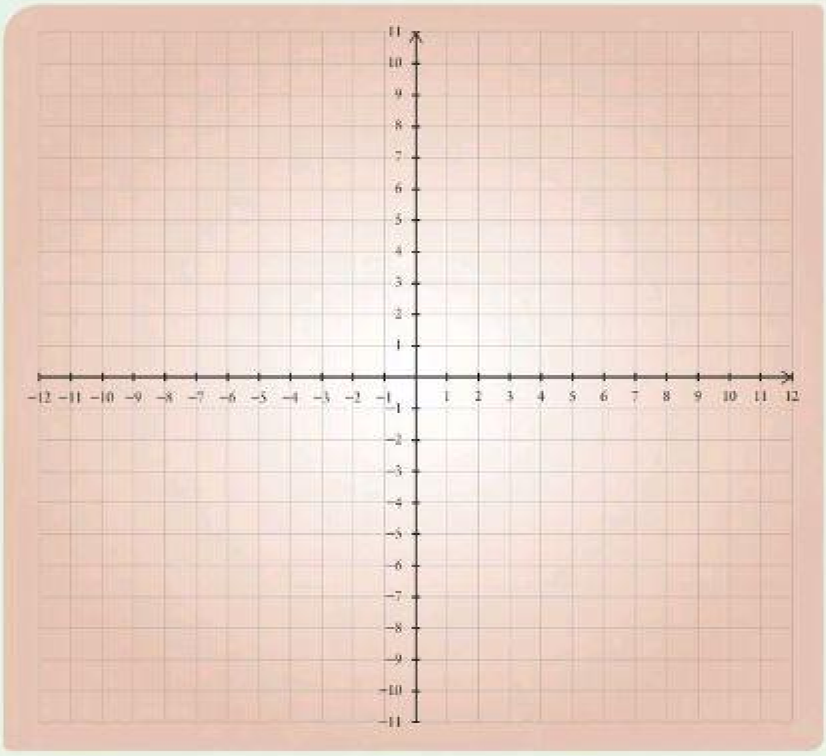
Tercer paso. Se localizan los puntos en el plano coordenado y se traza una línea por ellos. Se pueden prolongar los extremos, para tener una idea clara de cómo es la curva.



14. Realiza la gráfica de:

a) El costo de mandar una carta por correo.

b) El cobro del estacionamiento.



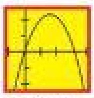
Graficación con la computadora

Con objeto de visualizar gráficamente las actividades analíticas que realizamos se presentan actividades donde se utiliza el graficador Winplot. Es un software libre que se encuentra en el siguiente sitio, claro que tú puedes utilizar otro si así lo crees conveniente.

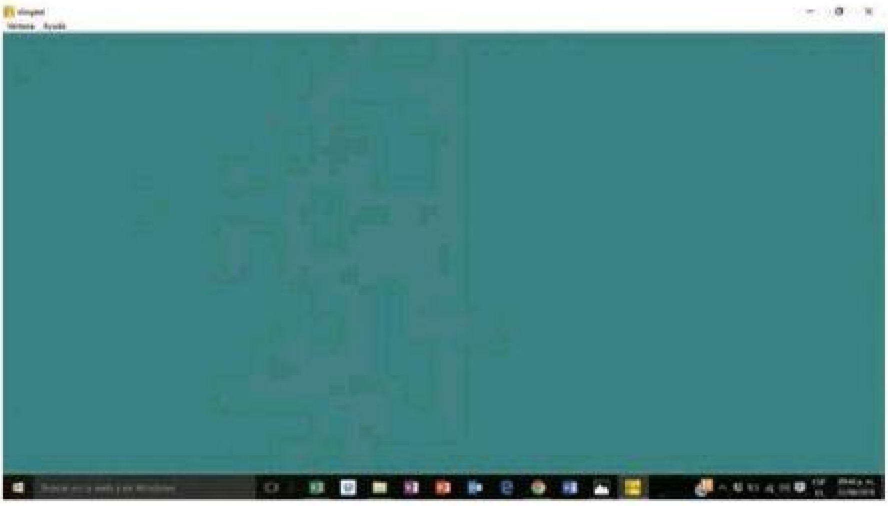
Para utilizar este software sigue estas instrucciones:

a) Da doble clic en el icono.

b) Aparece la siguiente pantalla.



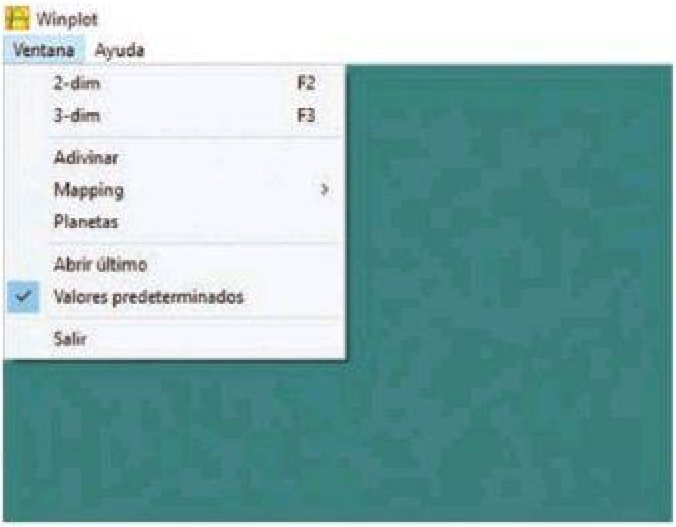
Wplotsp.exe

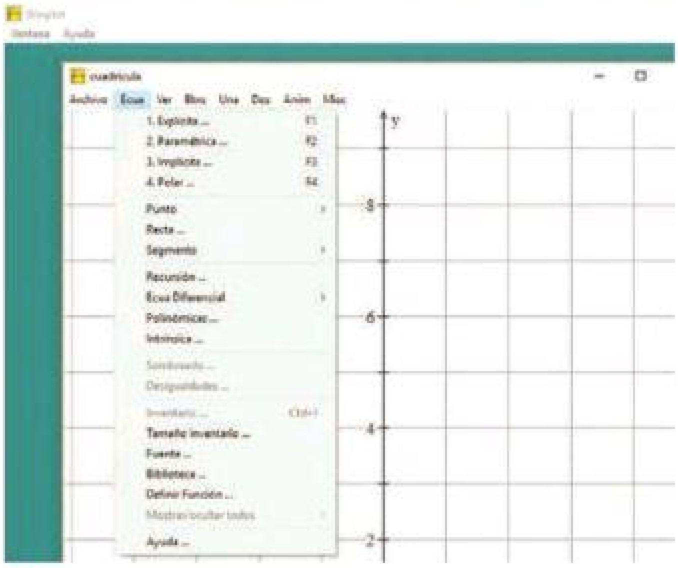


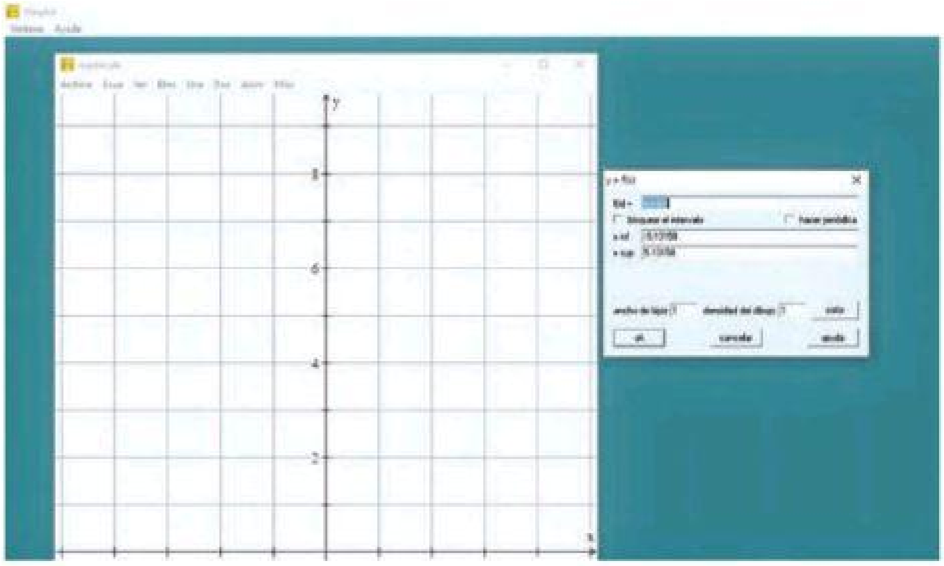
En ella encontrarás una barra de herramientas con el menú de: Ventana. Seleccionamos Ventana utilizando el mouse. En seguida aparece el menú en el que tú eliges si deseas graficar en dos o tres dimensiones, así como otras instrucciones más que no son parte de este curso; pero si tu curiosidad es mucha, ¡adelante! el camino es tuyo.

Elegimos 2–dim, con lo que aparece la pantalla de la derecha: La barra de herramientas presenta una serie de menús que iremos manejando según la necesidad. Elegimos Ecua, nos presenta el menú donde se elige la forma en la que se desea introducir la ecuación; la primera es en forma explícita, es la que utilizamos en los ejercicios que hemos realizado; la segunda es para ecuaciones polares, la siguiente ecuaciones paramétricas y, por último, se presenta la forma implícita. Al final de cada menú se presenta una instrucción de ayuda en la que se da amplia información de cómo se utiliza.

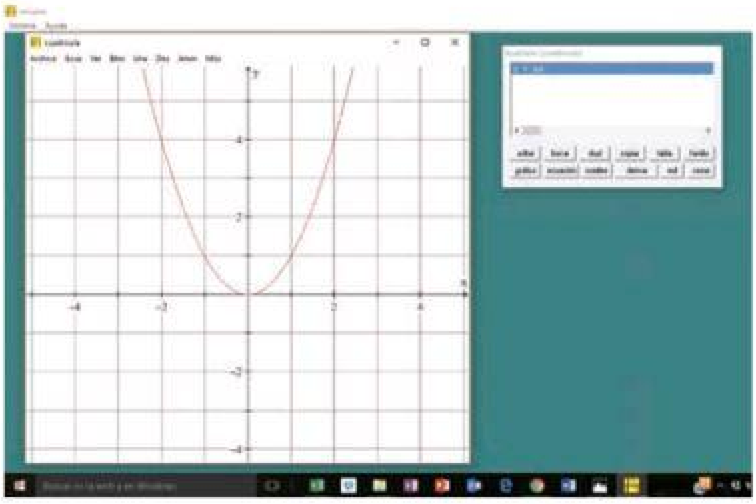
Elegimos la primera $y = f(x)$ y aparece una ventana pequeña llamada $y = f(x)$, donde debes observar que está iluminado de azul y aparece $f(x) = x \sin (x)$, aquí es donde se introduce la ecuación que se desea graficar, simplemente debes de teclear la función que deseas. Automáticamente se borra la ecuación marcada con azul, si no está iluminada la ventana sitúate con el mouse y borra el contenido, después teclea la ecuación. Grafiquemos la ecuación cuadrática, para elevar al cuadrado o a una potencia se puede escribir *xx* o bien x ^2, para una función trigonométrica se escribe: sin (x), cos (x), tan (x), el argumento se encierra entre paréntesis, para log (x), ln (x), exp (x) = e^x, etcétera. En el apartado de ayuda encontrarás información referente a este tema.



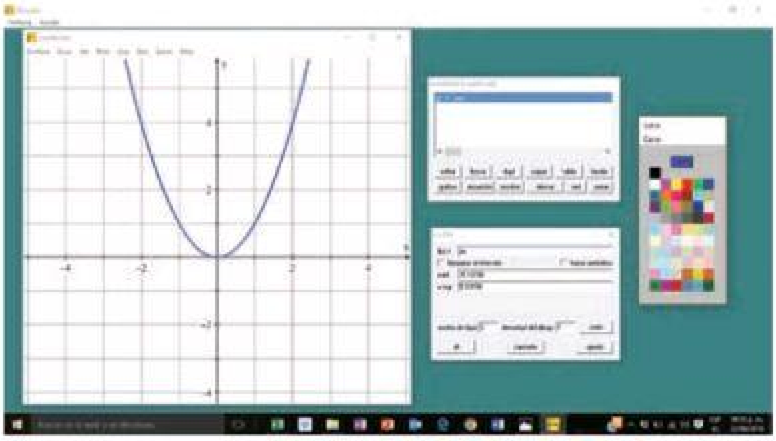


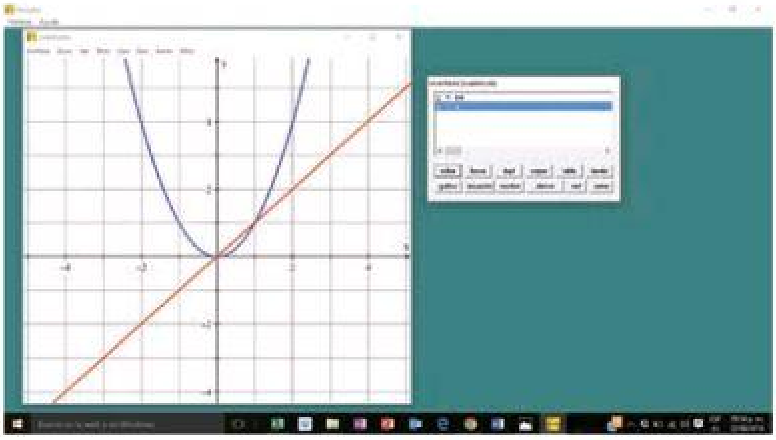


Tecleamos *xx* y aparece la ventana de abajo: inventario de sinnombre, en ella se encuentra la función que se está graficando. En la otra ventana se presenta la gráfica, compárala con la que realizaste en el ejercicio de la función cuadrática.



Ahora tracemos una nueva función: la idéntica. Repetimos el proceso, seleccionamos Ecua de la barra de herramientas, del menú seleccionas $y = f(x)$ o bien puedes oprimir F2 y teclear la función; para cambiar el color seleccionamos color y aparece una nueva ventana la de "color curva" elegimos el color rojo y después cerrar. A continuación se muestran las ventanas que se utilizaron.





ACTIVIDAD TRANSVERSAL

Resuelve los siguientes problemas y contesta las preguntas que se plantean. Si es posible utiliza la tecnología.

1. Se tiene una población de bacterias que se duplica cada hora.

a) ¿Cuál será el tamaño de la población después de 1, 2, 3, 4 horas?
b) ¿Cuál será el tamaño de la población después de 12 horas?
c) ¿Cuándo la población de bacterias alcanzará la cantidad de 450 000 bacterias?
d) ¿Cuál es la población de bacterias después de t horas?
e) Construye una tabla con los valores anteriores.
f) Traza la gráfica que represente los datos obtenidos.
g) Traza la gráfica con azul si es creciente y con rojo si es decreciente.

2. Se tiene una población de 10 000 bacterias que se duplica cada 3 horas.

a) ¿Cuál será el tamaño de la población después de 3, 6, 9, 12 horas?
b) ¿Cuál será el tamaño de la población después de 12 horas?
c) ¿Cuándo la población de bacterias alcanzará la cantidad de 450 000 bacterias?
d) ¿Cuál es la población de bacterias después de t horas?
e) Construye una tabla con los valores anteriores.
f) Traza la gráfica que represente los datos obtenidos.
g) Traza la gráfica con azul si es creciente y con rojo si es decreciente.

3. Una persona compra un automóvil con un valor de $220 000 y sabe que cuando el auto sale de la agencia se deprecia un 20%. También sabe que en los años subsecuentes se deprecia un 10% anual.

a) ¿Cuál es el valor del auto en el primer año?
b) ¿Cuál es el valor del auto en los años 2, 3, 4, 5?
c) Construye una tabla con los valores anteriores.
d) Traza la gráfica de la depreciación del auto.
e) Traza la gráfica con azul si es creciente y con rojo si es decreciente.

4. Se sabe que las cuentas de inversión pagan un 6% anual. Si una persona invierte $50 000:

a) ¿Cuánto tendrá al final de cada año (capital e intereses)?
b) ¿Cuánto tendrá al final de 7 años?
c) ¿Cuánto tendrá al final de 10 años?
d) Construye una tabla con los valores anteriores.
e) Traza la gráfica respectiva.
f) Traza la gráfica con azul si es creciente y con rojo si es decreciente.
g) ¿Qué sucede si la tasa de inversión aumenta al 50%?
h) ¿Qué sucede si la tasa de inversión disminuye al 1%?

5. Se realiza una investigación de cómo se propaga un rumor en una ciudad, para ello se manda un mensaje por WhatsApp a 100 personas y se observa que éste se duplica por la cantidad de personas que conocen el rumor cada hora.

a) ¿Cuántas personas conocerán el rumor después de 1, 2, 3, 4, 5 horas?
b) ¿Cuántas personas conocerán el rumor después de 15 horas?
c) ¿Cuántas personas conocerán el rumor después de t?

d) Construye una tabla con los valores anteriores.

e) Traza la gráfica respectiva.

f) ¿Cómo crees que crecerá el rumor si éste se triplica cada hora?

6. Considera las temperaturas que se dieron en grados Celsius de las 15 horas a las 24 horas de un día después:

19°, 18°, 16°, 15°, 13°, 11°, 10°, 9°, 8°, 7°, 7°, 7°, 6°, 6°, 5°, 5°, 6°, 7°, 8°, 10°, 13°, 15°, 17°, 18°, 16°, 15°, 13°, 11°, 10°, 9°, 9° y 9°.

a) Realiza una tabla con los datos hora-temperatura.

b) Traza una gráfica de los datos. Traza con azul cuando aumenta la temperatura, con rojo donde decrece, con naranja el máximo valor de todas las temperaturas y con café el mínimo valor de las temperaturas.

c) Determina la velocidad con que cambió la temperatura. Utiliza la pendiente *m*.

Dominio de una función

Para determinar el dominio de una función, sólo basta ver dónde está definida, por ejemplo, en la función polinomio vemos que cualquier número que se sustituya por el valor de x lo podemos elevar a cualquier potencia, multiplicarlo por cualquier constante y sumarlos algebraicamente, por ello decimos que en estas funciones su dominio son todos los reales.

$$f : R \longrightarrow R$$

En las **funciones racionales** observamos que el denominador debe ser distinto de cero para poder efectuar las operaciones, por ello debemos encontrar los valores que cumplen con esta condición o de otra forma, los que hacen que el denominador sea cero y éstos se les resta a todos los números reales, lo que facilita encontrar el dominio de estas funciones. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplos

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{3}{x - 5}$. Determina el dominio.

Por simple inspección vemos que el denominador $x - 5$ es cero cuando x es igual a 5, por lo que el dominio de la función es todos los números reales menos el 5.
Otras formas de escribir esto es: $R - \{5\}$;

$$f : R - \{5\} \longrightarrow R$$

En forma de intervalos lo escribimos así:	$-\infty < x < 5$	o	$5 < x < \infty$
Otra forma es:	$(-\infty, 5)$	o	$(5, \infty)$

2. Sea la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 25}$. Determina el dominio.

Por simple inspección vemos que el denominador $x^2 - 25$ es cero cuando x es igual a 5 o -5, por lo que el dominio de la función son todos los números reales menos el 5, y el -5.

Otras formas de escribir esto es: R – {–5, 5};

$$f : R - \{-5, 5\} \longrightarrow R$$

En forma de intervalos:	$-\infty < x < -5$	o	$-5 < x < 5$	o	$5 < x < \infty$
Otra forma es:	$(-\infty, -5)$	o	$(-5, 5)$	o	$(5, \infty)$

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x - 15}$. Determina el dominio.

En este caso no es tan fácil determinar los valores de x, el denominador $x^2 - 2x - 15$ debe ser distinto de cero para poder operar la función, pero es más sencillo determinar el complemento, o sea, cuando el denominador es igual cero y estos valores se les restan a los números reales.

Sea $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Ésta es una ecuación de segundo grado y la podemos resolver por cualquier método, en este caso la factorizamos como:

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x - 5 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x + 3 = 0$$

Despejamos a x: $\qquad x = 5 \qquad$ o bien $\qquad x = -3$

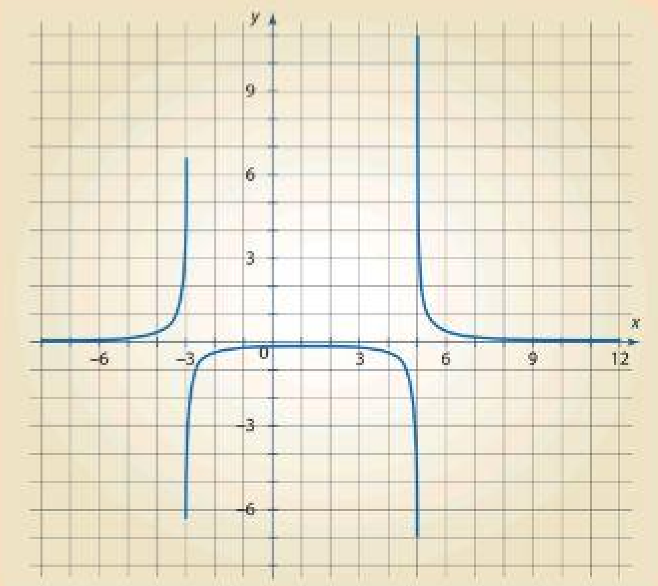
Por lo que $x = 5$ y $x = -3$ son los valores donde el denominador es cero, por lo que el dominio de la función son todos los números reales menos el 5 y el –3.

Otras formas de escribir esto es: $R - \{5, -3\}$;

$$f : R - \{5, -3\} \longrightarrow R$$

En forma de intervalos:	$-\infty < x < -3$	o	$-3 < x < 5$	o	$5 < x < \infty$
Otra forma es:	$(-\infty, -3)$	o	$(-3, 5)$	o	$(5, \infty)$

En la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x - 15}$ señala con color rojo los dos valores que no son elementos del dominio.



Ejercicios

Determina el dominio de las siguientes funciones y traza la gráfica marcando los puntos con color rojo que no son elementos del dominio, con color azul donde es creciente y con color verde donde decrece la función.

1. $f(x) = \dfrac{4}{x - 6}$
2. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 5}$
3. $f(x) = \dfrac{2x}{4x - 5}$
4. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{6x - 5}$
5. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 3x + 5}$
6. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x^2 - 2x - 5}$
7. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 2x - 15}$
8. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 36}$
9. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{3x + 4}$
10. $f(x) = \dfrac{6x - 3}{2 - 3x}$
11. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{4x - 4}$
12. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$
13. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x^2 - 3x - 1}$

En las funciones radicales observamos que el radicando debe ser mayor o igual que cero para poder efectuar las operaciones, ya que si es menor que cero éste no se puede operar; por ejemplo, la raíz de –4 no existe en los números reales, por ello debemos encontrar los valores que cumplen con esta condición.

Ejemplo

Obtén el dominio de la función $f(x) = \sqrt{9 - x}$.

Entonces, $9 - x$ debe ser mayor o igual que cero, o sea que x debe ser menor o igual que 9. En símbolos tenemos:

$$9 - x \geq 0$$
$$9 \geq x$$

Su dominio lo podemos escribir como $x \leq 9$.

En intervalo $(-\infty, 9]$.

Ejercicio

Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4 - x}$.

Ejemplo

Obtén el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$.

El radical $x^2 - 25$ debe ser mayor o igual que cero.

En símbolos:

$$x^2 - 25 \geq 0$$
$$x^2 \geq 25$$
$$|x| \geq 5$$

Resolvemos utilizando la definición correspondiente para valor absoluto:

$$x \geq 5 \qquad \text{o} \qquad x \leq -5$$

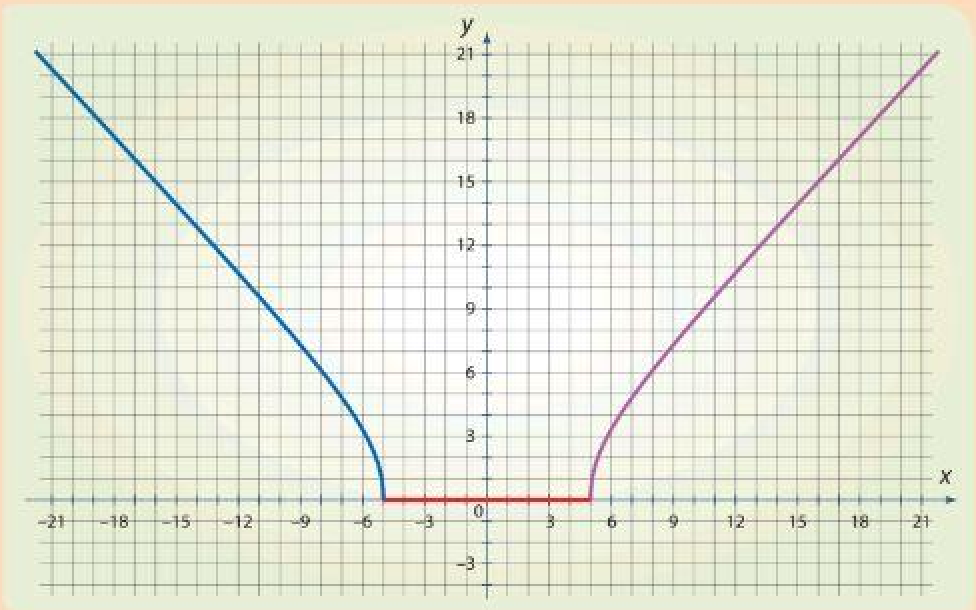
El dominio lo podemos escribir utilizando intervalos como: $(-\infty, -5]$ o $[5, \infty)$

El valor cero no se encuentra en el dominio de la función, por lo que si se trata de operar vemos que no se puede.

$$f(x) = \sqrt{0^2 - 25}$$

$f(x) = \sqrt{-25}$ no existe en los números reales.

Gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$. Observa todos los puntos que no son elementos del dominio (color rojo).



Ejercicios

Determina el dominio de las siguientes funciones. Traza la gráfica marcando los puntos con color rojo que no son elementos del dominio, con color azul donde es creciente y con color verde donde decrece la función.

1. $f(x) = \sqrt{7 - x}$
2. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
3. $f(x) = \sqrt{4x - 3}$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
5. $f(x) = \sqrt{(1 - x)(x - 3)}$
6. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 9}$
7. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x - 3}{x - 2}}$
8. $f(x) = \sqrt{1 - x}$
9. $f(x) = \sqrt{3x - 4}$
10. $f(x) = \sqrt{5x + 6}$
11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$
12. $f(x) = \sqrt{(5 + x)(x - 4)}$
13. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 7}$

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

En la siguiente dirección encontrarás un artículo.

https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zenon

Actividades a realizar

1. Lee el artículo y escribe las palabras que no entiendas, busca su significado.
2. Contesta las preguntas que se plantean.
   a) ¿Cuál sería la idea de Zenón de crear estas paradojas?
   b) ¿Cuál es el propósito de una paradoja?
   c) ¿Cuál de las paradojas de Zenón se te hace la más interesante?
   d) ¿Qué relación tienen las paradojas de Zenón con la idea del límite?

Actividad socioemocional

Hablando de matemáticas:

1. ¿Cómo te consideras?

   ____

2. ¿Conoces tus problemáticas?

   ____

3. ¿Cuál es tu problemática para aprender?

   ____

4. ¿Que problemas exiten para que destaques?

   ____

5. ¿A quién consideras el mejor de tus compañeros?

   ____

CIERRE

EVALUACIÓN SUMATIVA

Instrucciones: Contesta cada una de las preguntas que se te dan.

I. Con tus palabras escribe las siguientes definiciones:

1. Función. ____________________

2. Dominio. ____________________

3. Contradominio. ____________________

4. Variables. ____________________

5. Constante. ____________________

II. Clasifica las siguientes funciones:

1. $y = \frac{1}{x^5}$ ____________________
2. $y = \sqrt[3]{3x^2 - x + 5}$ ____________________
3. $f(x) = \text{sen } (7x + 3)$ ____________________
4. $y = 3^{4x-3}$ ____________________
5. $y = \ln 2x - 5$ ____________________

III. Encuentra $f(a)$, $f(-2)$ y $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $h \neq 0$, para la siguiente función: $f(x) = 5x - 3$

IV. Realiza un bosquejo gráfico de las siguientes funciones:

1. Constante
2. Idéntica
3. Cuadrática
4. Valor absoluto

V. Determina el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{4x - 5}{6 - x} \qquad\qquad f(x) = \sqrt{21x - 42}$$

VI. Encuentra el dominio para la inversa de la función $\cos x$.

VII. Encuentra el dominio de la función $y = 2^x$.

VIII. Encuentra el dominio de la función $y = e^x$.

IX. Encuentra el dominio de la función $y = \ln x$.

X. Dada la función $y = \dfrac{3x}{x^2 + x - 12}$.

Realiza su gráfica.

Traza en color rojo donde la función es creciente.

Traza en color azul donde la función es decreciente.

Traza en color verde los valores máximos.

Traza en color cafe los valores mínimos.

Traza en color naranja los valores que no son elementos del dominio.

1. AUTOEVALUACIÓN

Aspecto a evaluar	Excelente	Bueno	Regular	Satisfactorio
Realicé los ejercicios correctamente	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Trabajé en equipo	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Actividad integradora (ver puntaje)	Valor: 10 puntos	Valor: 7 puntos	Valor: 4 puntos	Valor: 2 puntos
Lectura	Contesté correctamente más de 90% de las preguntas. Valor: 5 puntos	Contesté correctamente entre 80 y 89% de las preguntas. Valor: 4 puntos	Contesté correctamente entre 70 y 79% de las preguntas. Valor: 3 puntos	Contesté correctamente menos de 70% de las preguntas. Valor: 2 puntos
Trabajo extraclase	Realicé todas mis tareas. Valor: 5 puntos	Realicé 80% de mis tareas. Valor: 4 puntos	Realicé 60% de mis tareas. Valor: 3 puntos	Realicé 50% de mis tareas. Valor: 2 puntos
Suma de puntos por columna				
Total de las columnas	De 45 a 50 puntos	De 40 a 44 puntos	De 35 a 39 puntos	Menos de 35 puntos

2. AUTOEVALUACIÓN DISCIPLINAR

Revisa la actividad. Contesta el dominio que tienes de los siguientes conceptos.

Concepto	Lo domino	No lo domino
Cambio y predicción: elementos del cálculo.		
Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición.		
Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones.		

PARTE 2

EJE

Pensamiento y lenguaje variacional

SEGUNDA PARTE

A continuación se presentan los elementos que definen el trabajo que vamos a realizar en este Eje.

Componentes

- Cambio y predicción: elementos del Cálculo.

Contenido central

- **Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales.** Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.

Contenidos específicos

2.1 ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones representacionales?

2.2 ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

2.3 ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿una cuadrática con una lineal?, ¿se te ocurren otras?

2.4 Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto.

2.5 Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.

Aprendizajes esperados

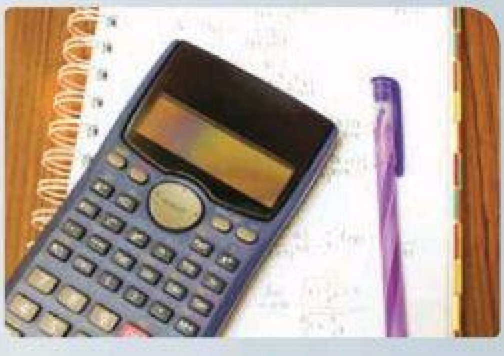
- Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.
- Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).
- Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.
- Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.

Productos esperados

- Estimar lo siguiente: Si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?

APERTURA

Evaluación diagnóstica



1. La factorización de la expresión $2x^2 + 6x$, es: ( )

   a) $2x(x - 3)$ *b*) $2x(x + 3)$ *c*) $x(x + 3)$ *d*) $2(x^2 + 3x)$

2. La factorización de la expresión $x^2 - 4x + 4$: ( )

   a) $(x - 2)^2$ *b*) $(x + 4)(x - 4)$ *c*) $(x + 2)(x - 4)$ *d*) $(x + 2)^2$

3. La factorización de la expresión $9x^2 - 16$: ( )

   a) $(3x - 4)^2$ *b*) $(3x + 4)(3x - 4)$ *c*) $(4 - 3x)(4 + 3x)$ *d*) $(3x + 4)^2$

4. La factorización de la expresión $x^2 - x - 12$: ( )

   a) $(x + 3)(x - 4)$ *b*) $(x + 2)(x - 6)$ *c*) $(x - 3)(x + 4)$ *d*) $(x + 3)^2$

5. La factorización de la expresión $4x^2 + 4x - 3$: ( )

a) $(2x - 1)(2x + 3)$ *b*) $(2x + 1)(2x + 3)$

c) $(2x + 1)(2x - 3)$ *d*) $(2x - 1)(2x - 3)$

6. La factorización de la expresión $9x^2 - 12x + 4$: ( )

a) $(3x + 2)^2$ *b*) $(3x - 3)(3x + 4)$ *c*) $(2 + 3x)^2$ *d*) $(3x - 2)^2$

7. Si $f(x) = 4x - 3x + 2$ determina $f(-2)$: ( )

a) 30 *b*) 24 *c*) -24 *d*) 20

8. Realiza la siguiente operación: $\dfrac{(x + 2)(x + 3)}{x} - \dfrac{(x + 4)^2}{2x} =$ ( )

a) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x - 16}{2x}$ *b*) $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 2x + 16}{2x}$

c) $\dfrac{x^3 - 4x^2 - 2x - 16}{2x}$ *d*) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x - 16}{2x^2}$

9. Las funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, exponenciales y ( )

a) Racionales *b*) Logarítmicas *c*) Irracionales *d*) Algebraicas

10. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ( )

a) Los irracionales *b*) Q

c) R *d*) $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

11. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{6 - x}$ es:

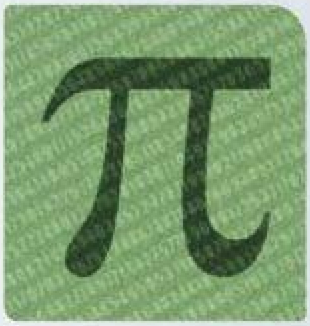
12. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{2 - x}{x - 4}$ es:

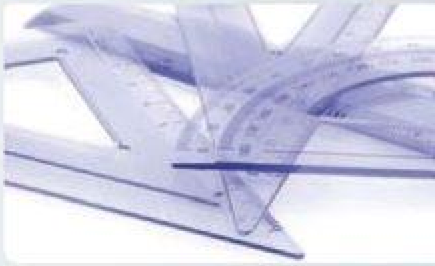
Tema integrador

Secuencia didáctica

Deduce y aprende

Buscando a π





Apertura de la actividad

Propósito: Determinar el perímetro de una circunferencia por el método de exhaución.

Conocimientos previos: ¿Cómo se obtiene el perímetro de la circunferencia?

¿Cómo se determina el perímetro de un polígono?

Materiales:

- Juego de geometría
- Compás
- Transportador
- Hojas blancas

Desarrollo de la actividad

1. Se forman equipos de cinco alumnos.
2. Recuerden la formación de su portafolio de evidencias.
3. Cada alumno se numera del 1 al 5.
4. Cada alumno traza una circunferencia de radio $r = 4$ cm y dentro de ella traza un polígono inscrito según la regla siguiente:

   El alumno 1, un polígono de tres lados.

   El alumno 2, un polígono de cuatro lados.

   El alumno 3, un polígono de cinco lados.

   El alumno 4, un polígono de seis lados.

   El alumno 5, un polígono de siete lados.

5. Cada alumno calcula el perímetro del polígono lo más exacto que pueda y justifica su procedimiento.

Lados	Perímetro
3	
4	
5	
6	
7	

6. Cada alumno traza una circunferencia de radio $r = 4$ cm, y un polígono circunscrito, según la regla siguiente:

   El alumno 1, un polígono de tres lados.

   El alumno 2, un polígono de cuatro lados.

El alumno 3, un polígono de cinco lados.

El alumno 4, un polígono de seis lados.

El alumno 5, un polígono de siete lados.

7. Cada alumno calcula el perímetro del polígono lo más exacto que pueda y justifica su procedimiento.

Lados	Perímetro
3	
4	
5	
6	
7	

8. Todos los alumnos concentran su información y la organizan.

	Polígonos inscritos					Polígonos circunscritos				
Lados	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3
Perímetro										

9. Calcula la longitud de la circunferencia de radio $r = 4$ cm (perímetro $= 2\pi r$) y compárala con los resultados obtenidos.

10. Encuentra la aproximación que se tiene entre el valor que obtuviste en la tabla y el valor de la fórmula.

Aproximación = |Valor de la fórmula − Valor del polígono|

11. Qué sucede si utilizamos la fórmula:

Aproximación = |Valor del polígono − Valor de la fórmula|

Puedes dar una idea geométrica de lo que representa esta fórmula.

12. Concentra la información en la tabla siguiente.

	Polígonos inscritos					Polígonos circunscritos				
Lados	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3
Perímetro										
Diferencia										

¿Cómo son las diferencias cuando el número de lados del polígono crece?

¿Cuántos lados crees que debe de tener el polígono para ser igual al cálculo con la fórmula?

13. Obtén un modelo matemático para calcular el perímetro de un polígono. Comprueba que tu modelo funciona para los resultados de los compañeros de tu equipo.

14. Con el modelo que tienes realiza los siguientes cálculos.

Lados	Perímetro	Aproximación
10		
100		
1 000		
10 000		
100 000		

15. Explica en qué consiste este proceso para determinar el perímetro.

16. Si ya tienes el valor del perímetro y el radio, ¿cómo determinas el valor de π?

Revisa los polígonos que se han trazado y observa cómo se aproximan más y más a la longitud de la circunferencia, unos por el interior y otros por el exterior, así podemos decir que cuando el número de lados crece indefinidamente el perímetro del polígono tiende a ser igual a la longitud de la circunferencia, esto se conoce como un proceso al límite.

Cierre de la actividad

Contesta las siguientes preguntas:

Escribe cinco ideas de dónde usas la palabra límite.

Escribe la definición de valor absoluto.

Representa gráficamente el valor absoluto.

Da el valor absoluto de las siguientes expresiones en forma algebraica y geométrica:

$|5| =$ $\qquad$ $|-4| =$

$|7-4| =$ $\qquad$ $|4-7| =$

$|c| =$ $\qquad$ $|-h| =$

$|x-a| =$ $\qquad$ $|a-x| =$

$|f(x)-a| =$ $\qquad$ $|a-f(x)| =$

Usa la definición de valor absoluto para desigualdades en los siguientes ejercicios y determina el intervalo que le corresponde.

$|x-4| < h$ $\qquad$ $|4-x| < h$

$|f(x)-3| < h$ $\qquad$ $|3-f(x)| < h$

$|x-a| < h$ $\qquad$ $|a-x| < h$

$|f(x)-a| < h$ $\qquad$ $|a-f(x)| < h$

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Formen equipos de cinco alumnos.	• Formen su portafolio de evidencias.	• Escriban en el cuaderno el análisis que hicieron sobre la situación didáctica.
• Lean la secuencia didáctica que se plantea.	• Diseñen los instrumentos para agrupar la información que se requiere. • Reunidos los alumnos del equipo: – Discutan las formas de cómo solucionar el problema. – Vayan contestando las preguntas que se plantean. – Cada uno indique las problemáticas que se le presentan en el trazo de los polígonos.	• Realicen un mapa mental. • Resuelvan los ejercicios que se presentan. • Discutan en equipo la importancia del concepto de límite, valor absoluto y cómo se aproximan el perímetro de los polígonos al perímetro de la circunferencia.
• Analicen la actividad que se presenta.	• Analicen la importancia de realizar este tipo de proyectos, anoten sus conclusiones. • Recuerden incluirlo en la presentación de la información.	• Tomen fotos del trabajo que realizan y lo anexan a su portafolio de evidencias. • Anoten sus conclusiones.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Documento

Instrumento: Rúbrica

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Análisis de la situación didáctica	Realiza una investigación completa de la situación.	Realiza una investigación clara y convincente.	La investigación no es clara y sólo se presentan recortes de páginas web.	La investigación es deficiente y no aporta conocimientos claros.
Desarrollo del tema integrador	Tiene orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones son correctas.	Tiene orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta no están bien fundamentados y no tiene conclusiones.
Presentación de resultados	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son claras.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son escasas.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, no tiene conclusiones.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son claras.

Propósito

Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que solucionen problemas surgidos de la actividad humana, tales como la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

¿Qué aprenderás?

- Resolver problemas de funciones utilizando para ello las bases de la derivada y la resolución de problemas de optimización.

¿Para qué te servirá?

En la industria, en todo lo que trata de resolver un problema de optimización. En las aplicaciones científicas se vuelve una de las herramientas más importantes, como el cálculo de velocidad instantánea, la aceleración, el cálculo de momentos, el trabajo y muchas cosas más.

Actividad socioemocional

Tu maestro:

1. ¿Cómo consideras a tu maestro?

2. ¿Sus explicaciones son amplias?

3. ¿Resuelve tus dudas?

4. ¿Sabes cómo te calificará?

5. ¿Tus calificaciones son acordes a tu dedicación?

Los sabios tienen la misma ventaja sobre los ignorantes que los vivos sobre los muertos.

Aristóteles

DESARROLLO

2.1 ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones representacionales?

Límite de una función

El cálculo de los límites es la base del cálculo diferencial e integral; para cada uno existe un tipo de límite, para el primero el límite tiende a ser cero y el segundo cuando el límite tiende a ser muy grande o infinito.

Para el cálculo de límites trataremos tres formas: tabular, gráfica y algebraica. La definición de límite se presenta para aquellos alumnos interesados en aumentar sus conocimientos al final de la segunda parte.

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} =$$

$f(x)$ está definida para todos los valores de x, excepto para $x = 1$. Además, si $x \neq 1$ el numerador y el denominador pueden ser divididos entre $x - 1$ para obtener:

$$f(x) = 3x + 2 \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

Forma tabular

Investigaremos los valores de la función $f(x)$ para valores de x cercanos a 1, pero no iguales, ya que la función no está definida para ese valor, dejemos que x tome los valores 0, 0.25, 0.75, 0.9, 0.99 y así sucesivamente. Estamos tomando valores de x cada vez más cercanos a 1, pero menores que 1; a esto se conoce como el límite por la izquierda de $f(x)$ y se representa por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

En forma explícita:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} =$$

Realicemos una tabla para esos valores de x y $f(x)$:

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x) = 3x + 2$ si $x \neq 1$	2	2.75	3.5	4.25	4.7	4.97	4.997	4.9997

Observa que cuando x se acerca al valor de 1, $f(x)$ se aproxima al valor de 5. Como nos acercamos al valor de 1 tomando valores menores o sea por la izquierda, entonces decimos que el límite por la izquierda de la función $f(x)$ es 5, en símbolos se escribe:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (3x+2) = 5$$

Lo mismo sucede cuando nos acercamos por la derecha al valor de 1, por lo que este límite lo llamaremos el límite por la derecha. En símbolos:

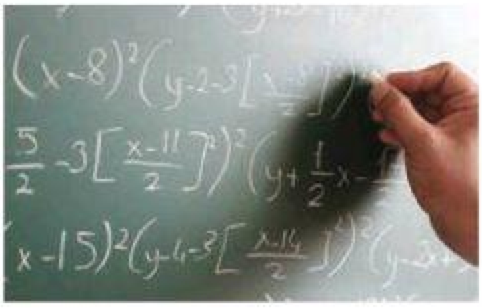
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

Los valores que tomaremos para acercarnos al valor de $x = 1$ por la derecha son: 2, 1.75, 1.5, 1.1, 1.01,1.001, 1.0001 y así sucesivamente:

x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x) = 3x + 2$ si $x \neq 1$	8	7.25	6.5	5.75	5.3	5.03	5.003	5.0003

Cuando más nos acercamos al valor de $x = 1$ entonces $f(x)$ se acerca al valor de 5, por ello decimos que el límite por la derecha de la función $f(x)$ es 5. En símbolos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (3x+2) = 5$$



Cuando el límite por la izquierda es igual al límite por la derecha, decimos que el límite de la función $f(x)$ es 5:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(3x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (3x+2) = 5$$

En el caso de que los límites no sean iguales decimos que el límite no existe.

Ejercicio

Encuentra el valor del siguiente límite en forma tabular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(4x-1)(x-1)}{x-1} =$$

Ejemplo

Calcula $\lim_{x\to -2} (2x-1) =$ utilizando la tabulación.

Solución:

Demos valores cercanos a $x = -2$, por la izquierda:

x	-2.5	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2.000001	-2
$f(x) = 2x - 1$	-6	-5.2	-5.02	-5.002	-5.0002	-5.00002	-5.000002	-5

$$\lim_{x \to -2^-} (2x - 1) = -5$$

Por la derecha:

x	-1.5	-1.75	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999	-1.99999	-2
$f(x) = 2x - 1$	-4	-4.5	-4.8	-4.98	-4.998	-4.9998	-4.99998	-5

$$\lim_{x \to -2^+} (2x - 1) = -5$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to -2} (2x - 1) = -5$

Podemos observar que cuando un límite está determinado, podemos sustituir el valor de x en la función y obtenerlo fácilmente. A diferencia de cuando no está determinado:

$$\lim_{x \to -2} (2x - 1) = \lim_{x \to -2} [2(-2) - 1] = -4 - 1 = -5$$

Ejercicios

Calcula los siguientes límites utilizando la tabulación.

1. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5)$
2. $\lim\limits_{x \to -5} (6x^2 - 3x + 2)$
3. $\lim\limits_{x \to 4} (2x - 3)(4x + 5)$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x + 2}{4x - 5}$
5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 3}{4x + 9}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x - 4}{x - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x - 9}$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{8x - 10}$
9. $\lim\limits_{x \to 100} (2x - 3)^2$
10. $\lim\limits_{x \to -100} \dfrac{1}{x}$
11. $\lim\limits_{x \to 5} (4x + 3)$
12. $\lim\limits_{x \to -3} (4x^2 - 2x + 5)$
13. $\lim\limits_{x \to -4} (6x - 2)(4x - 5)$
14. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{6x - 3}{2x - 4}$
15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 4}{3x - 5}$

16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x - 8}{5x - 1}$

17. $\lim_{x \to 4} \sqrt{6x - 2}$

18. $\lim_{x \to 0} \sqrt{6x - 3}$

19. $\lim_{x \to 100} (4x - 13)^2$

20. $\lim_{x \to 1000} \dfrac{4}{2x^2}$

Forma gráfica

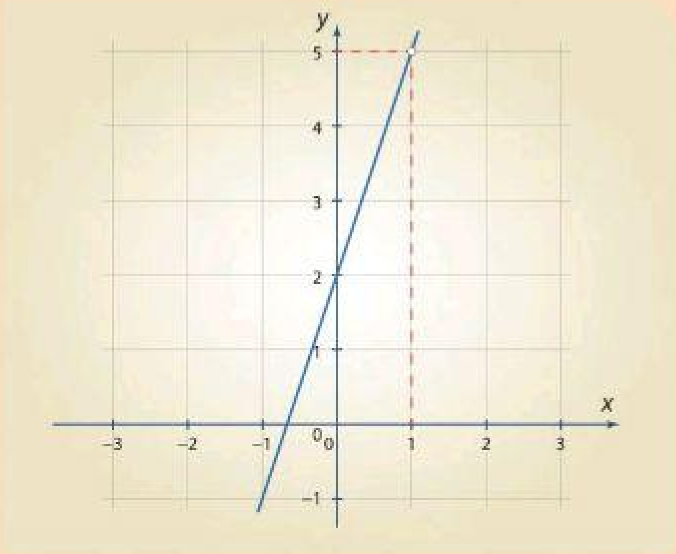
Ahora utilicemos la tabulación y la gráfica de la función para encontrar y visualizar algunos límites. Esta última forma se puede realizar con un graficador, lo que simplificará las cosas. Una manera muy sencilla de ver si existe el límite o no es considerar que la gráfica es una carretera y de cada extremo salen automóviles que se van a reunir en el punto que indica el límite, si éstos se encuentran el límite existe, en el caso contrario no existe.

Ejemplo

Encuentra el siguiente límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{(4x - 1)(x - 1)}{x - 1} =$ el cual ya lo encontramos por tabulación. Utilicemos el método gráfico para entender lo que sucede.

Solución

Primero tracemos la gráfica.



En la gráfica se ha marcado el punto (1, 5). Observa que en ese punto la función no está definida, por ello se marca con un círculo en blanco.

En la gráfica, traza con color rojo flechas que nos indiquen cómo nos acercamos a $x = 1$ por la izquierda y por la derecha sobre los ejes. Haz lo mismo para $f(x)$ cuando tiende a 5.

Si fuera una carretera y de cada extremo de la gráfica salen autos, ¿éstos se encontrarían en (1, 5)? _________

___

Ejercicio

Realiza la gráfica de $\lim_{x \to -1} \frac{(2x-1)(x+1)}{x+1} =$ y traza flechas que nos indiquen cómo nos acercamos al valor de $x = -1$ por la derecha y la izquierda; lo mismo realizamos para $f(x)$ cuando tiende al valor de ________________.

Ejemplo

Determina el $\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x - 5) =$ utilizando el método de tabulación y el método gráfico.

Solución

Primero determinamos el dominio de la función, del cual sabemos que está definida para todos los reales ya que es un polinomio.

La tabla para valores cercanos a $x = 1$ por la derecha y por la izquierda es el siguiente:

x	0.5	0.75	0.5	0.9	0.99	0.999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1	1.5
$f(x)$	−3.25	−2.18	−3.25	−1.49	−1.05	−1.005	−1	−0.999	−0.995	−0.95	−0.49	1.75

Cuando nos acercamos por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 3x - 5) = -1$$

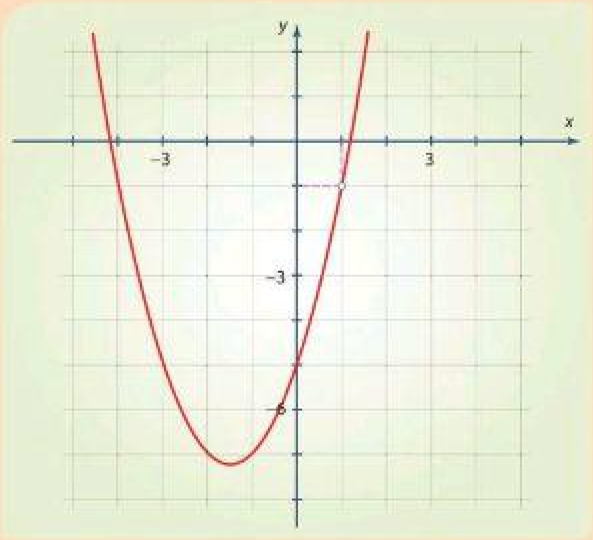
Cuando nos acercamos por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 3x - 5) = -1$$

Por tanto, como son iguales los límites:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x - 5) = -1$$

Veamos gráficamente, el punto que se marca es (1, 5):



Ejercicio

Determina el $\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 1) =$ utilizando el método de tabulación y el método gráfico.

Ejemplo

Obtén el $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ utilizando el método de tabulación y el método gráfico.

Solución

El dominio de f son todos los números reales menos el 2, o sea que $f(2)$ no está definida. Observa:

$f(2) = \dfrac{1}{2-2} = \dfrac{1}{0}$ esta operación no está definida. ¿Por qué? ______________________

____

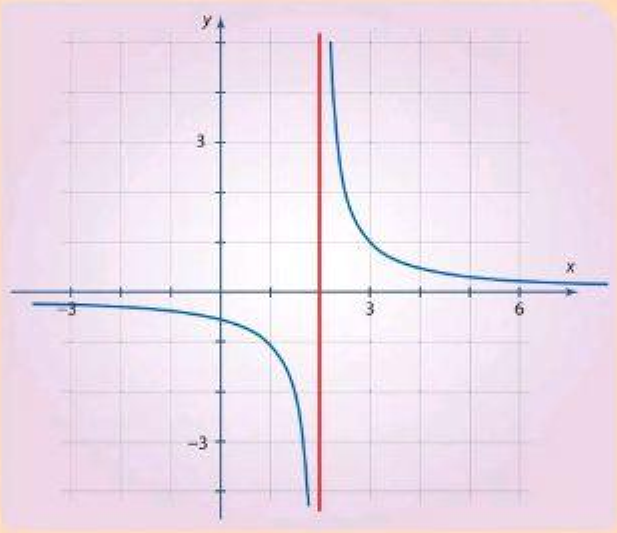
____

Utilicemos el método de tabulación para observar lo que sucede cuando nos acercamos al valor de 2 por la derecha y la izquierda.

x	1.5	1.75	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x) = 1/x - 2$	−2	−4	−5	−10	−100	−1 000	######	10 000	1 000	100	10	2

Al observar la tabla, vemos que cuando más nos acercamos al valor de 2 por la izquierda el valor de $f(x)$ decrece tendiendo a valores muy pequeños, lo que nombramos como menos infinito ($-\infty$). Cuando más nos acercamos al valor de 2 por la derecha el valor de $f(x)$ crece y tiende a valores muy grandes, lo que nombramos como infinito (∞). Es claro que el límite por la izquierda es diferente del límite por la derecha, cuando éstos tienden a 2, por ello decimos que el límite no existe.

Veamos gráficamente: $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$, si te acercas por la izquierda (traza la rama de la hipérbola que corresponde en color café), describe lo que sucede: ______________________. Si te acercas por la derecha (traza la rama de la hipérbola que corresponde en color verde), describe lo que sucede, ______________________, la gráfica representa una hipérbola donde la recta $x = 2$ es una asíntota (trázala en color azul).



Si es una carretera y de cada extremo salen automóviles, ¿crees que se encontrarían cuando $x = 2$? ______________________

____

Ejercicios

I. Determina el $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{x+2}$ utilizando el método de tabulación y el método gráfico.

II. Determina los siguientes límites, utilizando el método de tabulación y el método gráfico.

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)$
2. $\lim\limits_{x\to -5} (x^2-x+2)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (2x-3)(4x+5)$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-3}{4x-4}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-3}{4x-16}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x-4}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x-6}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{8x-10}$
9. $\lim\limits_{x\to 10} (2x-3)^2$
10. $\lim\limits_{x\to -100} \frac{1}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 5} (2x+1)$
12. $\lim\limits_{x\to -1} (x^2+2x-1)$
13. $\lim\limits_{x\to -1} (6x-2)(4x-5)$
14. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{5x-3}{4x+4}$
15. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x+4}{3x-6}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-8}{5x-1}$
17. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x-5}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{6x-3}$
19. $\lim\limits_{x\to 10} (4x-13)^2$
20. $\lim\limits_{x\to 1000} \frac{4}{2x^2}$

Propiedades

Las propiedades de los límites simplifican su cálculo. Estas propiedades son las que garantizan que se proceda de una manera correcta en la obtención de límites y se conoce como la **forma algebraica** para el cálculo de los límites.

Las principales propiedades sobre límites son las siguientes:

1. La propiedad de la unicidad:

   Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$

   Entonces $L_1 = L_2$

   Esta propiedad afirma que una función no puede aproximarse a dos límites distintos al mismo tiempo, con la cual se garantiza que si el límite de una función existe, éste es único.

2. Si c es una constante, entonces para cualquier número a $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Ejemplo

Determina el $\lim\limits_{x\to 2} 5$.

Solución

Al aplicar la propiedad 2 obtenemos $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$.

Ejercicio

Obtén el $\lim\limits_{x \to 5} 2$.

3. Si x es una variable, entonces $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Ejemplo

Determina el $\lim\limits_{x \to 2} x$.

Solución

Utilicemos la propiedad 3: $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

Ejercicio

Obtén el $\lim\limits_{x \to 5} x$.

4. Si $f(x)$ es una función, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

   Observa que esta propiedad nos permite obtener el límite de una función en una forma sencilla.

Ejemplo

$\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5)$

Utilizando la propiedad 4, calculamos $f(3) = 2(3) - 5 = 1$

Por lo que $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5) = 1$

Ejercicio

Determina $\lim\limits_{x \to -2} (2x - 5)$.

5. Si c es una constante y $f(x)$ es una función, entonces $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = cf(a)$.

Ejemplo

Obtén el $\lim\limits_{x \to 2} 3x$.

Solución

Utilicemos la propiedad 5: $\lim\limits_{x \to 2} 3x = 3(2) = 6$

Ejercicio

Determina el $\lim_{x\to 5} 7x$.

6. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$.

Ejemplo

Obtén el siguiente $\lim_{x\to 4}(3x^2 + 2x)$ si se conoce $\lim_{x\to 4} 3x^2 = 48$ y $\lim_{x\to 4} 2x = 8$.

Solución

Utilizando la propiedad 6 se tiene $\lim_{x\to 4}(3x^2 + 2x) = 48 + 8 = 56$.

Ejercicio

Determina $\lim_{x\to 1}(2x^2 + 5x)$ si se conoce $\lim_{x\to 1} 2x^2 = 2$ y $\lim_{x\to 1} 5x = 5$.

7. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L \cdot M$.

Ejemplo

Determina el siguiente $\lim_{x\to 4}(3x^2)(2x)$, si se conoce $\lim_{x\to 4} 3x^2 = 48$ y $\lim_{x\to 4} 2x = 8$.

Solución

Utilizando la propiedad 7 se tiene $\lim_{x\to 4}(3x^2)(2x) = (48)(8) = 384$.

Ejercicio

Obtén $\lim_{x\to 1}(2x^2)(5x)$, si se conoce $\lim_{x\to 1} 2x^2 = 2$ y $\lim_{x\to 1} 5x = 5$.

8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}\; M \neq 0$.

Ejemplo

Determina el siguiente $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x^2}{2x-1}$, si se conoce $\lim_{x\to 4} 3x^2 = 48$ y $\lim_{x\to 4} 2x - 1 = 7$.

Solución

Utilizando la propiedad 8 se tiene: $\lim_{x\to 4}\dfrac{3x^2}{2x-1} = \dfrac{48}{7} = 6.85$.

Ejercicio

Obtén $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2}{5x-1}$, si se conoce $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1) = 4$.

9. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Con $L \geq 0$ y n cualquier entero positivo.

Nota: estas propiedades de límites no se alteran cuando $x \to a$ se reemplaza por:

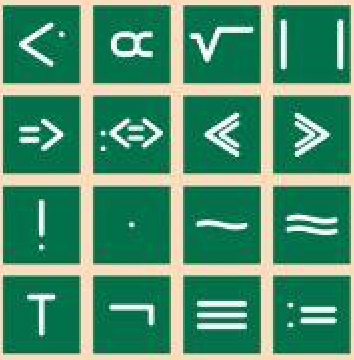
$$x \to a^+ \qquad \text{o} \qquad x \to a^-$$

Ejemplo

Determina el siguiente $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{4x+1}$, si $\lim\limits_{x\to 6}(4x+1) = 25$.

Solución

Utilizando la propiedad 9 se tiene $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{4x+1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 6}(4x+1)} = \sqrt{25} = 5$



Ejercicios

I. Obtén $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x+1}$ si se conoce $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1) = 4$.

II. Usa las propiedades de límites y encuentra los siguientes límites si existen:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)$
2. $\lim\limits_{x\to -5}(6x^2-3x+2)$
3. $\lim\limits_{x\to 4}(2x-3)(4x+5)$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+2}{4x-5}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-3}{4x+9}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-4}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{4x-9}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{8x-10}$
9. $\lim\limits_{x\to 100}(2x-3)^2$
10. $\lim\limits_{x\to -100} \dfrac{1}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 10\,000} \dfrac{4}{2x^3}$
12. $\lim\limits_{x\to 5}(4x+3)$
13. $\lim\limits_{x\to -3}(4x^2-2x+5)$
14. $\lim\limits_{x\to -4}(6x-2)(4x-5)$
15. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{6x-3}{2x-4}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 4}{3x - 5}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - 8}{5x - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{6x - 2}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{6x - 3}$

20. $\lim\limits_{x \to 100} (4x - 13)^2$

21. $\lim\limits_{x \to 1000} \dfrac{4}{2x^2}$

22. $\lim\limits_{x \to 10000} \dfrac{10}{2x^3}$

Límites indeterminados

Los límites indeterminados se presentan en las funciones racionales cuando el divisor es cero.

$$\lim_{x \to 0} \frac{c}{x} = \frac{c}{0}$$

Es posible evitar la indeterminación en algunos casos transformando la función en otra equivalente, para esto se recurre a la factorización, racionalización o simplemente a la división.

Cuando tenemos que un límite que tiende a un valor y éste nos da como resultado $\frac{0}{0}$, a esto se le llama una indeterminación, o sea que el valor del límite no está determinado. Este tipo de indeterminaciones es posible quitarlas utilizando la factorización, esto sucede porque al evaluar un polinomio y el resultado es cero, quiere decir que este valor es una raíz o solución de las dos funciones.

Por la propiedad de los polinomios, si $f(x)$ es un polinomio, a es un número real y se tiene que $f(a) = 0$, entonces a es una raíz del polinomio $f(x)$.

Ejemplo

Obtén el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$

Solución

Por inspección directa al aplicar las propiedades (4):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Entonces 1 es una raíz de los polinomios, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y de $x - 1$ lo expresamos como:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Ejercicio

Traza la gráfica y marca en ella el punto (1, 2).

Ejemplo

Obtén el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$$

Solución

Por inspección directa y aplicando las propiedades de los límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Entonces 1 es una raíz de los polinomios, $x^2 - 2x + 1$ y de $x - 1$, por lo que lo expresamos así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x - 1 = 0$$

Ejercicio

Obtén el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} =$$

Realiza su gráfica para entender la razón.

Ejemplo

Determina $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Solución

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0}$$

Para evitar la indeterminación, racionalizamos el denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{\sqrt{x} - 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x} + 1\right) = 2$$

Ejercicios

Determina $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

Nota: Antes de realizar los siguientes ejercicios debes de tener en cuenta saber factorizar diferencias de cuadrados y trinomios de la forma $x^2 + ax + c$, con buena agilidad.

Obtén los siguientes límites si existen.

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} =$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} =$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x} - 2} =$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} =$

5. $\lim\limits_{x\to 121} \dfrac{x - 121}{\sqrt{x} - 11} =$

6. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{x} - \sqrt{7}} =$

7. $\lim\limits_{x\to 32} \dfrac{x - 32}{\sqrt{x} - 4\sqrt{2}} =$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{20}{9}} \dfrac{9x - 20}{3\sqrt{x} - 2\sqrt{5}} =$

9. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} =$

10. $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}} \dfrac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x - \sqrt{3}} =$

11. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} =$

12. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3} =$

13. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2 - 3x - 28}{x - 7} =$

14. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x - 5} =$

15. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{3}x - \sqrt{15}}{x - \sqrt{2}} =$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} =$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

18. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{6}}{x - 6} =$

19. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} =$

20. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} =$

21. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - x - 12} =$

22. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x - 7}{x^2 - 3x - 28} =$

23. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 5}{x^2 - 9x + 20} =$

24. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6} =$

25. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 6x + 8} =$

26. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} =$

27. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} =$

28. $\lim\limits_{x\to -121} \dfrac{4x^2 - x}{2x} =$

29. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} =$

30. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{6}} =$

31. $\lim\limits_{x\to 45} \dfrac{x - 45}{\sqrt{x} - 3\sqrt{5}} =$

32. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}} \dfrac{4x - 3}{2\sqrt{x} - \sqrt{3}} =$

33. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} =$

34. $\lim_{x \to -\sqrt{2}} \frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x + \sqrt{2}} =$

35. $\lim_{x \to -\sqrt{5}} \frac{x^2 - 2\sqrt{5}x + 3}{x + \sqrt{5}} =$

36. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} =$

37. $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - x + 30}{x - 6} =$

38. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x + 3} =$

39. $\lim_{x \to -\sqrt{2}} \frac{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}x - \sqrt{6}}{x - \sqrt{2}} =$

40. $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} =$

41. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 25} =$

42. $\lim_{x \to 121} \frac{\sqrt{x} - 11}{\sqrt{x} - 11} =$

43. $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7} =$

44. $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 9} =$

45. $\lim_{x \to -4} \frac{x + 4}{x^2 + 6x + 8} =$

46. $\lim_{x \to 6} \frac{x - 6}{x^2 - x + 30} =$

47. $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9x + 18} =$

48. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 3} =$

49. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 2x - 3} =$

50. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} =$

Límites cuando *x* tiende a infinito

El símbolo ∞ no implica que nos referimos a un número, sino a algo muy grande o en su defecto a algo muy pequeño, así por ejemplo, en el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Nos dice que es ∞ (infinito) pero lo que sucede en realidad al ver el límite por la izquierda y por la derecha es que uno tiende a menos infinito −∞ y otro tiende a más infinito +∞. Observa las gráficas y la tabla.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

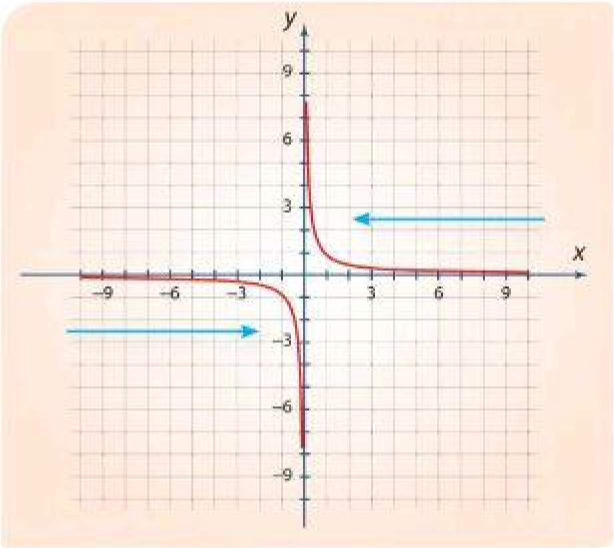


Tabla	
−0.56	−1.78571
−0.48	−2.08333
−0.4	−2.5
−0.32	−3.12500
−0.24	−4.16667
−0.16	−6.25
−0.08	−12.5
0.0	Indefinido
0.08	12 500
0.16	6.25
0.24	4.17
0.32	3.125
0.4	2.5
0.48	2.083
0.56	1.78571

Nos dice que cuando seleccionamos una x suficientemente cercana a 0 entonces $\frac{1}{x}$ es tan grande como deseemos.

Ahora trataremos límites cuando x tiende a un valor muy grande. Para ello utilizaremos la siguiente regla que es muy importante:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Para entender este límite utilicemos la siguiente tabla:

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	1 000 000 000
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.0000001	0.000000001

Vemos que cuando x crece el valor de $f(x)$ se hace cada vez más pequeño. Pensemos que el uno es cualquier cosa, por ejemplo, un pastel. ¿Qué sucede con la parte que te toca si lo divides entre 1, 2, 10, 100, 1 000, etc., partes?

Para evaluar un límite en una función racional dividimos el numerador y el denominador, entre la mayor potencia de x que se tenga.

Ejemplo

Encuentra el $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 3x + 5}{4x^2 - 2x - 3} =$

Solución

La potencia más grande de x es x^2, por ello dividimos cada término del numerador y el denominador entre ésta.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} =$$

Simplifiquemos la expresión realizando las divisiones:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} =$$

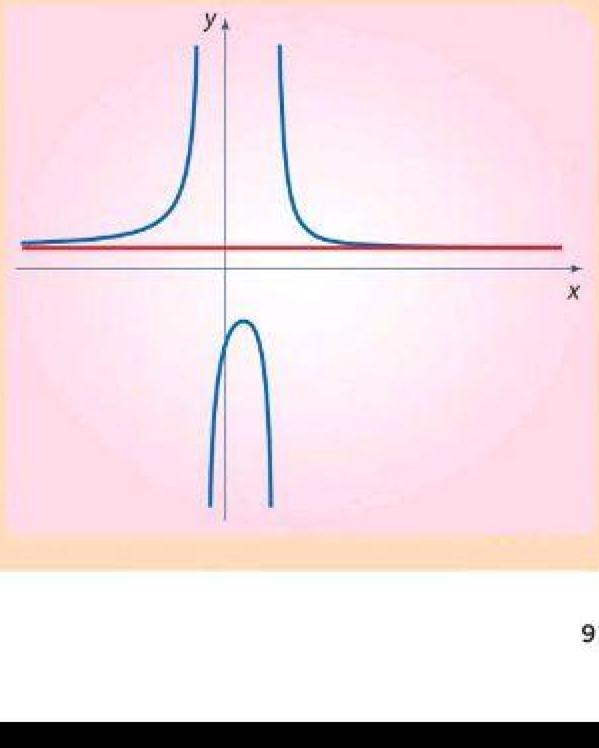
Aplicamos el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, si el denominador es una potencia de x con mayor razón éste será cero más rápido. Comprueba que es cierto, por tanto, todos los cocientes que tienen a x como denominador son cero.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 0 + 0}{4 - 0 - 0} = \frac{3}{4}$$

Al tabular la función:

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
$f(x) =$	−5	0.7294	0.746413046	0.749626626	0.75	0.74999625	0.75	0.75

Cuando x toma un valor muy grande entonces $f(x)$ tiende al valor de $0.75 = \frac{3}{4}$.



La recta horizontal es $y = \frac{3}{4}$.

Ejercicio

Encuentra el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - x + 3}{2x^2 - 5x - 4} =$

Ejemplo

Obtén el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{x^3 - 3} =$

Solución

La potencia más grande de x es x^3, por ello dividimos cada término del numerador y el denominador entre ésta.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3}{x^3}} =$$

Simplifiquemos la expresión realizando las divisiones:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^3}} =$$

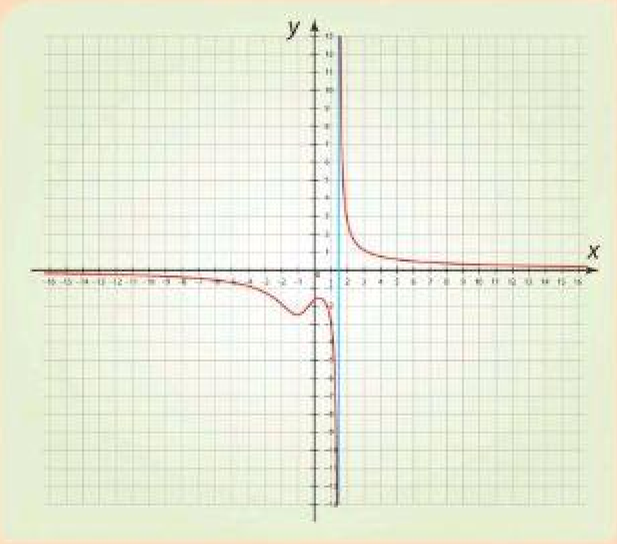
Aplicamos el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, si el denominador es una potencia de x con mayor razón éste será cero más rápido, por tanto, todos los cocientes que tienen a x como denominador son cero.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{0 + 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Al tabular la función:

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x) =$	−6	0.2856	0.02981	0.002998	0.00029998	2.99998E−05	3E−06

Cuando x toma un valor muy grande entonces $f(x)$ tiende al valor de 0.



El eje xx' es una asíntota.

Ejercicio

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 7}{x - 5} =$ halla en sus tres formas.

Ejemplo

Encuentra el $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 3x + 5}{2x - 3} =$

Solución

La potencia más grande de x es x^2, por ello dividimos cada término del numerador y el denominador entre ésta.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} =$$

Simplifiquemos la expresión realizando las divisiones:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} =$$

Aplicamos el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, si el denominador es una potencia de x con mayor razón éste será cero más rápido.

Por tanto, todos los cocientes que tienen a x como denominador son cero.

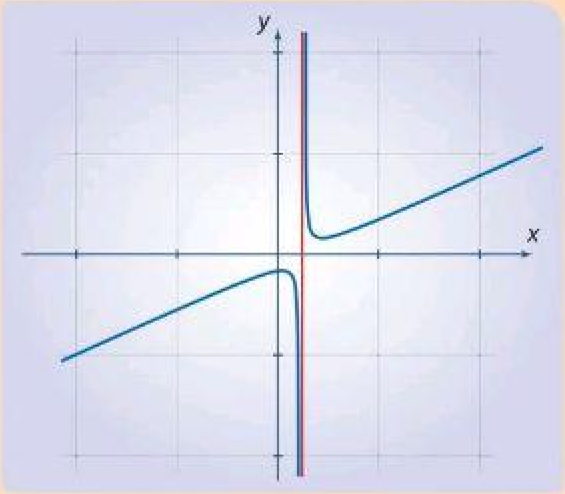
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 0 + 0}{0 - 0} = \frac{3}{0} = \text{indeterminado}$$

Al tabular la función:

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
$f(x) =$	–5	16.176	150.786802	1500.75363	15001	150000.75	1500001	15000001

Cuando x toma un valor muy grande entonces $f(x)$ tiende a un valor muy grande.

Observa que hay una asíntota en $x = \frac{3}{2}$ pero cuando x crece el valor de $f(x)$ también crece.



Ejercicios

Encuentra los siguientes límites si existen, en forma algebraica, pero te puedes ayudar de los otros métodos.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} =$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x - \sqrt{3}} =$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} =$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^3 + 3} =$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x - 28}{x^4 - 7} =$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5} =$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} =$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{6}}{x - 6} =$
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} =$
11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 3}{x^2 + 4x + 3} =$
12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{x^2 - x - 12} =$
13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 7}{3x^2 - 3x - 28} =$
14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 5}{x^2 - 9x + 20} =$
15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{7x^2 + 5x + 6} =$
16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - x - 12}{7x^2 + 6x + 8} =$
17. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x + \sqrt{2}} =$
18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2\sqrt{5}x + 3}{x + \sqrt{5}} =$
19. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} =$
20. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 30}{x^3 - 6} =$
21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^4 + 3} =$
22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}x - \sqrt{6}}{x^2 - \sqrt{2}} =$
23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 25} =$
24. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x} - 11}{\sqrt{x} - 11} =$
25. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 11}{\sqrt{x} - \sqrt{11}} =$
26. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 3}{x^2 - 6x + 9} =$
27. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 4}{x^2 + 6x + 8} =$
28. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x - 6}{x^2 - x + 30} =$
29. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x + 3}{2x^2 - 9x + 18} =$
30. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 3} =$
31. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 - 9x + 18}{5x^2 - 2x - 3} =$
32. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 12} =$

Dadas las funciones:

$f(x) = x,$ $f(x) = 2x,$ $f(x) = 3x,$ $f(x) = 4x$

$f(x) = -x,$ $f(x) = -2x,$ $f(x) = -3x,$ $f(x) = -4x$

$f(x) = x^2$ $f(x) = -x^2$ $f(x) = x^2 + 2$ $f(x) = x^2 - x + 3$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ $f(x) = \frac{1}{4x+5}$

Encuentra para cada una de ellas:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Obtén los siguientes límites: $\lim_{s \to 1} \frac{s^3 - 1}{s - 1}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ multiplica por $\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{7}{x}\left[\frac{3}{x+4} - \frac{3}{4}\right]$

$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t}\right)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{\sqrt{2x+4} - \sqrt{4x - x^2}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

$\lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y + 2}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} + 1}{x}$

2.2 ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

Uno de los temas que más se utilizan en las matemáticas es el cálculo diferencial e integral, el cual se originó por el año de 1666, cuando sir Isaac Newton (1642–1727) desarrolló las bases de lo que hoy conocemos como cálculo diferencial. Al mismo tiempo, el filósofo y matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) realizó investigaciones similares, además de que creó los símbolos matemáticos que se utilizan hoy en día para la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Claro que no todo se debe a Newton y a Leibniz, pues desde tiempos remotos los griegos hallaron áreas aplicando el método de agotamiento, el cual utilizas en las actividades integradoras, asimismo, conocían el método de triangulación. Eudoxo utilizó dicho método para calcular el área de un círculo, lo que implícitamente lo llevó al cálculo de límites. Sin embargo, como se podrá suponer, esta idea no la supieron capitalizar, tal vez por ello estas concepciones presenten grandes problemas para su aprendizaje.

Hoy en día el cálculo diferencial es la materia del cambio: velocidad y aceleración, de las rectas tangentes, la pendiente en un punto, áreas, volumen, longitud de arco, y un sinfín de aplicaciones, principalmente en todas las actividades donde hay movimiento. Se puede aplicar en el precio del dólar con respecto al peso, el aumento de la gasolina y del petróleo, en las inversiones, en la optimización de procesos, etcétera.

La importancia del cálculo radica principalmente en que la mayoría de las tecnologías de hoy utilizan el cálculo diferencial, así como en muchas infraestructuras creadas por el hombre: las grandes construcciones, las vías de comunicación, los puentes, edificios, carreteras.

A lo largo de este libro encontrarás una serie de aplicaciones del cálculo diferencial e integral: agricultura, física, química, biología, economía, etcétera.

2.3 ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿Una cuadrática con una lineal?, ¿Se te ocurren otras?

Operaciones con funciones

En este tema trataremos las operaciones con funciones, las cuatro operaciones básicas que son suma, resta, multiplicación y división algebraicas, por último, veremos una operación desconocida que es la composición de funciones.

Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f + g$, denominada suma de f y g mediante la definición siguiente.

$$(f+g)\ (x) = f(x) + g(x)$$

De modo semejante definimos el producto $f \cdot g$ y el cociente $\frac{f}{g}$ de f y g por:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

Algunos hechos acerca de la suma, el producto y el cociente de funciones son consecuencias inmediatas de hechos acerca de sumas, productos y cocientes de números.

Ejemplos

Sean las funciones $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 7x - 3$, determina:

$$(f+g)(x) \qquad (f\,g)(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= 3x - 5 + 7x - 3\\ &= 10x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\,g)(x) &= f(x)\,g(x)\\ &= (3x-5)(7x-3)\\ &= 21x^2 - 44x + 15\end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-5}{7x-3}$$

Ejercicios

Utilizando los resultados anteriores obtén:

$f(5) =$	$g(5) =$	$f(3) =$	$g(3) =$
$f(5) + g(5) =$	$f(3) + g(3) =$	$(f + g)(5) =$	$(f + g)(3) =$
$f(5)\, g(5) =$	$f(3)\, g(3) =$	$(fg)(5) =$	$(fg)(3) =$
$\left(\dfrac{f(5)}{g(5)}\right) =$	$\left(\dfrac{f(3)}{g(3)}\right) =$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(5) =$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(3) =$

Composición de funciones

La composición de funciones $(g \circ f)(x)$ se define como $g(f(x))$, que se lee "g aplicado a $f(x)$". Es una operación que nos permite crear nuevas funciones.

Ejemplo

Sea $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2 - 2x$. Obtén las composiciones $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 - 2(3x) = 9x^2 - 6x$$

Observa que de la definición se tiene que $f(x) = 3x$, y le aplicamos a $g(x)$. Recuerda que cada x la sustituimos por $3x$, y realizamos operaciones.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x) = 3(x^2 - 2x) = 3x^2 - 6x$$

Ejercicios

Determina las siguientes operaciones con estas funciones:

$(f + g)(x)$ $\quad (3f - 4g)(x)$ $\quad (g \circ f)(x)$ $\quad (f \circ g)(x)$ $\quad (fg)(x)$ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ x

1. $f(x) = \sqrt{x - 3}$ $\qquad g(x) = x^2 + 3$
2. $g(x) = \sqrt{x - 4}$ $\qquad f(x) = x^2 + 5$
3. $f(x) = 3x - 1$ $\qquad g(x) = 2x^2 - 3$
4. $f(x) = 4x + 1$ $\qquad g(x) = 5x^2 + 4$

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un trozo de alambre de 5 m de longitud se corta en dos pedazos; una parte se dobla en forma circular y otra en forma cuadrada.
   a) Encuentra la regla de correspondencia que relacione la suma de las áreas "A" de las figuras formadas con el punto de corte "x" de alambre, es decir, $A = A(x)$.
   b) ¿Cuál es la suma de las áreas de las figuras formadas si el corte se hace de 2 m de uno de los extremos?

2. El propietario de una tienda de computadoras observa que puede vender 30 equipos cada semana a \$3 000 y 50 equipos si los vende a \$2 500. Supón que se existe una relación lineal entre el precio de venta "x" y la demanda "D" de compra.
   a) Encuentra la regla de correspondencia que relacione la demanda "D" con el precio "x", es decir una función $D = D(x)$.
   b) Describe el dominio y rango.
   c) ¿Cuántas computadoras venderá si el precio es de \$2 700 por equipo?

ACTIVIDAD TRANSVERSAL

1. Una persona de 2 metros de altura está situada entre una lámpara ubicada en el piso y una pared que se encuentra a 10 m de la lámpara; la persona proyecta una sombra de altura h sobre la pared, esta altura depende de la distancia x que hay entre la persona y la pared.
   a) Traza a escala un dibujo de la situación del problema.
   b) Mueve a la persona a diferentes distancias: 1 m, 2 m, 3 m, etc. Determina la altura para cada caso.
   c) Determina la regla de la correspondencia que relacione la altura h con la distancia x, es decir una función $h = h(x)$.
   d) ¿Qué altura tendrá la sombra si la persona está a 7 m de la lámpara?

2. Supongamos que las diferentes temperaturas de las capas de la Tierra (t) se rigen por medio del modelo matemático $t = 15 + 0.01\ h$, donde h representa la profundidad en metros y t la temperatura. Determina las temperaturas que se alcanzan a 50, 100, 150, 200 y 250 metros de profundidad y si es creciente o decreciente la función al realizar la gráfica.

3. En la Ciudad de México los índices de contaminación a las 6 de la mañana son de 10, si dichos índices se incrementan cada hora en 5 unidades, determina un modelo matemático que nos permita conocer el índice de calidad del aire a distintas horas del día.

4. Se desea construir una caja sin tapa de base cuadrada recortando en las esquinas cuadrados igualves, para ello se cuentan con cuadrados de lámina de 36 cm. Determina una función que represente al volumen de la caja.

5. Una persona realiza un análisis para contratar una compañía de telefonía móvil y para ello le presentan la siguiente tabla de precios:

Recargas

Recarga	Saldo Total	Minutos y SMS	Megas para navegar		Megas adicionales	Vigencia
$10	$20		200 MB		10 MB	1 día
$20	$40		300 MB		30 MB	1 día
$30	$60		300 MB		50 MB	3 días
$50	$100		1,000 MB		120 MB	7 días
$100	$200	ILIMITADOS	1,000 MB		350 MB	21 días
$150	$300		2,000 MB		600 MB	30 días
$200	$400		2,000 MB		1,200 MB	30 días
$250	$500		2,000 MB		1,500 MB	30 días
$300	$600		2,000 MB		2,000 MB	30 días

a) Construye una gráfica entre la recarga y el saldo total.
b) Expresa algebraicamente la función correspondiente.
c) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
d) ¿Existe una relación entre el saldo total y el total de megas?
e) ¿Podrías dar un modelo matemáticos para esta situación?
f) ¿Cuál consideras que es la mejor oferta?

6. Se desea construir un tanque cilíndrico sin tapa, con volumen de 400 litros para el almacenamiento de agua en las casas. Determina una función que relacione el área con la superficie del cilindro.

7. Un conejo es perseguido por un perro. El conejo lleva al perro una ventaja inicial de 25 de sus saltos. El conejo da cinco saltos mientras el perro da dos, pero el perro en tres saltos avanza tanto como el conejo en ocho saltos. ¿Crees que el perro alcance al conejo? Si es así, ¿cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?

8. Una buena aproximación al peso normal p de una persona, cuando tiene una estatura de más de 1.50 m, está dada por la ecuación $p = 0.9e - 100$, donde la estatura e está dada en centímetros. ¿Cuál será la estatura de una persona cuyo peso normal es de 50 kg? Construye una tabla en la que se muestre la estatura de personas que midan de 1.50 a 1.80 m.

9. Un soldador sabe que una varilla de acero de 3.4 metros pesa 20.2 kg. ¿Cuánto pesará un tramo de 2.7 m de la misma varilla?

10. El precio por kilogramo de carne para hamburguesas aumentó 10% este mes. Ahora cuesta \$149.50 el kilogramo. ¿Cuánto costaba el kilogramo el mes anterior? Si el precio aumentó 8% el mes anterior, ¿cuánto costaba el kilogramo hace dos meses?

11. La compañía manufacturera "Sacalepunta" fabrica sacapuntas. Supongamos que cuesta \$4 hacer un sacapuntas que se vende a \$6. ¿Cuántos sacapuntas deben fabricarse y venderse para tener una ganancia de \$10 000?

12. Supongamos que la agencia de alquiler de automóviles "El vochito" cobra \$200 por día y \$2.20 por km. ¿Qué tan lejos podemos viajar con \$1 300?

13. Una vendedora de bienes raíces trabaja por un pequeño salario más un porcentaje por cada casa que vende. Si su salario es de \$400 a la semana más 3.5% del valor de la casa que vende, ¿cuántos pesos en inmuebles debe vender para ganar \$150 000 al año? (considera 50 semanas por año).

14. Rubén tiene dos relojes de arena de diferente tamaño. En el primer reloj cada centímetro cúbico de arena pasa en un minuto, en el segundo reloj esa misma cantidad de arena pasa en tres minutos. En ambos relojes la arena total pasa en el mismo tiempo. Si el primer reloj contiene 27 cm^3 de arena, ¿cuántos centímetros cúbicos de arena contiene el segundo reloj?

15. En una tienda departamental se ofrece un descuento de 20% en toda la tienda y en el departamento de ropa un 50% extra. ¿Cuál es el descuento total en el departamento de ropa? Si una persona compra un traje de $1 500, ¿cuánto deberá pagar por la prenda? Da un modelo matemático que represente el pago que debe de realizar la persona y compruébalo con el precio del traje.

Ejercicio

1. Discute con el grupo y comprueba que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{1}{6}$$

¿Qué sucede si se obtiene con la gráfica? ____________________

____

____

¿Qué sucede si se toman valores muy pequeños por la derecha y la izquierda? ____________________

____

____

¿Cuál de los tres métodos consideras el más importante? ____________________

____

¿Por qué? ____________________

____

2.4 Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto

Continuidad de una función

Una función f es continua en un punto si y sólo si cumple las tres siguientes condiciones.

a) $f(a)$ existe *b*) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe *c*) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen para a, se dice que la función es discontinua en a.

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ	α β γ δ ε ζ η θ
Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π	ι κ λ μ ν ξ ο π ρ
Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω	ς σ τ υ φ χ ψ ω

Ejemplo

Determina si la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ es continua en $x = 5$.

Veamos si cumple con las tres condiciones siguientes:

a) $f(5)$ existe *b*) $\lim\limits_{x \to a} f(5)$ existe *c*) $\lim\limits_{x \to 5} f(5) = f(5)$

a) $f(5) = 5^2 - 3(5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$ existe

b) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 3(5) + 2 = 12$ existe

Por lo que se cumple que:

c) $\lim\limits_{x \to 5} f(5) = f(5)$ por tanto, la función es continua.

Ejercicio

Determina si la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ es continua en $x = 3$.

Ejemplo

Encuentra si la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ en $x = 1$ ¿es continua?

Solución

Obtenemos $f(1) = \dfrac{(1)^2 - 2(1) + 1}{(1)^2 - 1} = \dfrac{0}{0}$, por lo que está indeterminado, por tanto la función es discontinua en $x = 1$.

Ejercicios

1. Verifica si la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ es continua en $x = 1$.

II. Determina si son continuas las siguientes funciones, si no lo son redefine la función si es posible para que ésta sea continua.

$f(x) = -x,$ $\quad f(x) = -2x,$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad f(x) = x^2 - x + 3$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2x-3}$ $\quad f(x) = \frac{1}{4x+5}$

Ejemplo

Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \neq 4 \\ 4 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

Encuentra $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

Solución

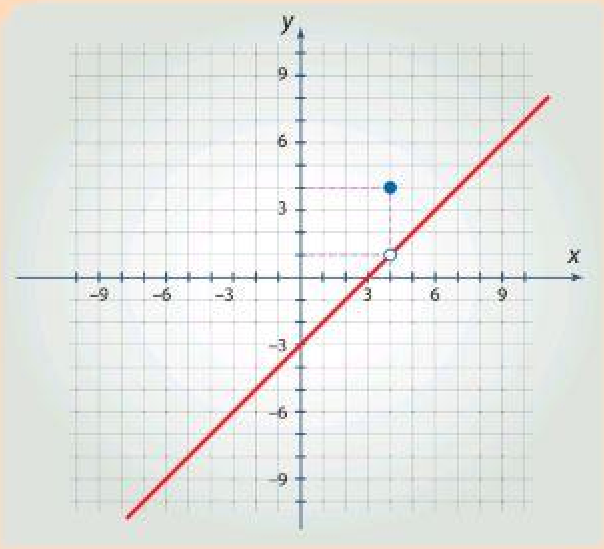
Al calcular $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, estamos considerando valores de x cercanos a 4 pero no iguales a 4, de este modo tenemos:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (x-3) = 1$$

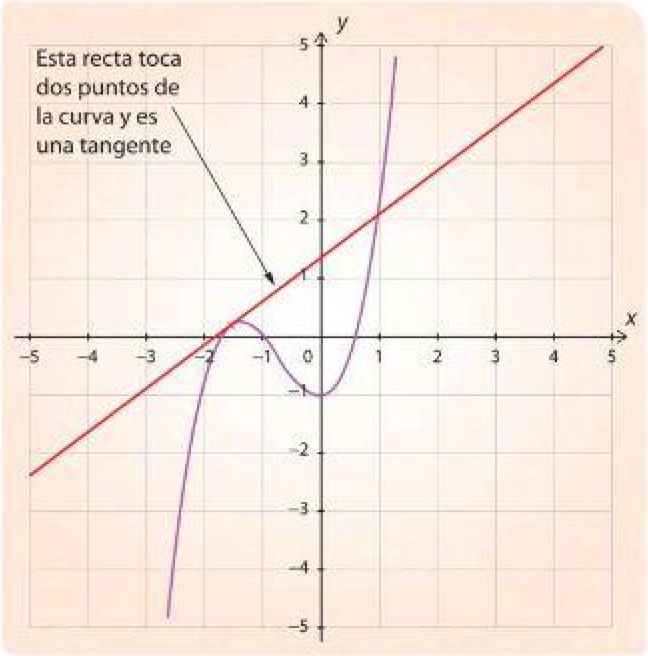
En este ejemplo veamos que el $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1$ pero $f(4) = 4$, por tanto $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$.

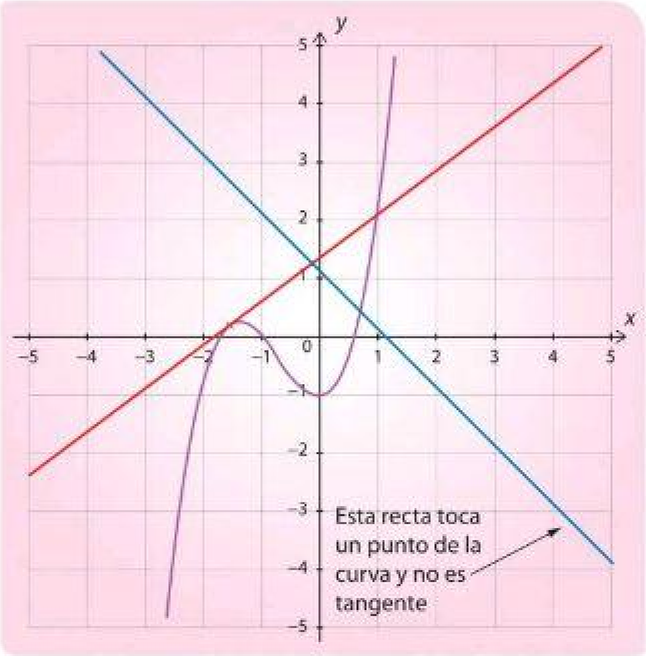
Éste es un ejemplo de una función que es discontinua en $x = 4$. En términos de geometría, esto significa que hay un salto en la gráfica de la función en el punto $x = 4$. La gráfica de función consiste del punto aislado $(4, 4)$ y la línea recta cuya ecuación es $y = x - 3$, con excepción del punto $(4, 1)$.

Traza la gráfica de $f(x)$.



Podemos entender que la recta tangente a una curva sólo tiene un punto en común, para aclarar esto mostramos las dos gráficas siguientes.

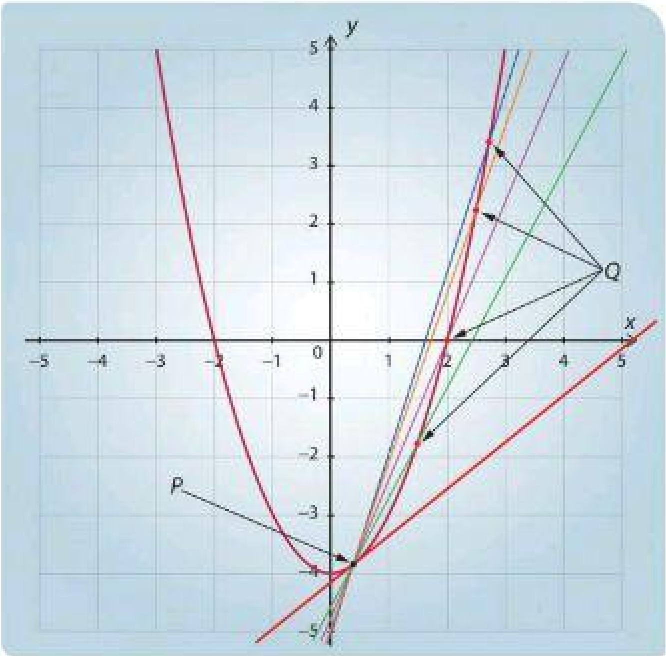




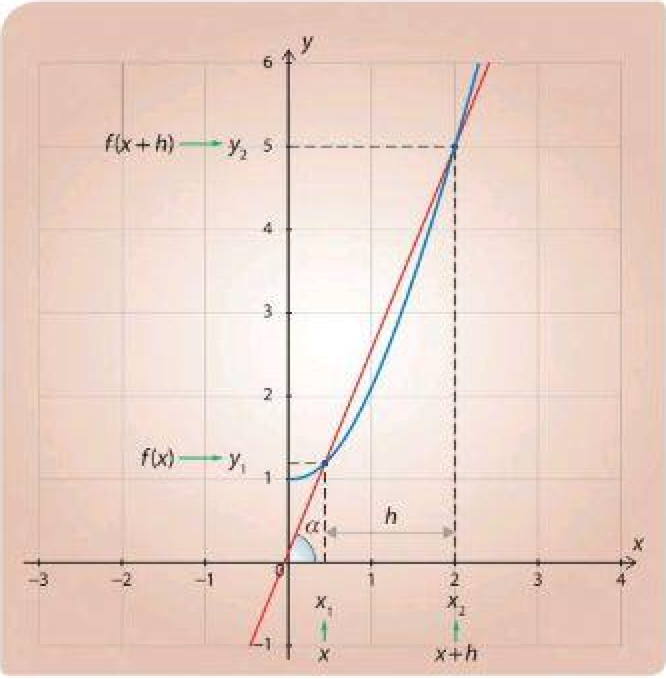
2.5 Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas

Definición de la recta tangente

La recta tangente a una curva en el punto P (punto de tangencia) se define como la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a confundirse con P. Gráficamente se tiene:



La derivada de una función $y = f(x)$ en el punto P es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Escribimos $m(x)$ para indicar que se trata de una función de x. Veamos la interpretación geométrica de la derivada con dos tipos de notaciones diferentes:



Si consideramos la notación donde los puntos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la pendiente se escribe como la conociste en geometría analítica.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora utilizamos la notación que utilizaremos para el cálculo diferencial, que en realidad es lo mismo.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cuando h tiende a un valor muy pequeño tenemos la pendiente a la recta, tangente a la curva en un punto o muy cercano, tanto como quieras. Este es un proceso de límites por lo que lo escribimos así:

$$m(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \tan \alpha$$

que se conoce como la definición de la derivada, que es igual a la pendiente en un punto x, y es igual a la tangente del ángulo que forma con la horizontal.

En algunos libros los autores utilizan Δx en lugar de la h.

Utilizando la definición obtengamos algunas derivadas, para aclarar esto.

Ejemplos

1. Obtén la derivada de la función $f(x) = c$.

2. Sea $f(x) = c$ una función derivable, obtén la derivada utilizando la definición.

Solución

Tenemos $f(x) = c$, obtenemos $f(x + h) = c$.

Sustituimos en la definición de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Ejercicio

Obtén la derivada de $f(x) = 5$, utilizando la definición de derivada.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^2$ una función derivable, obtén la derivada utilizando la definición.

Solución

Tenemos $f(x) = 2x^2$.

Obtenemos $f(x + h) = 2(x + h)^2$, eso quiere decir que en lugar de la x escribimos $x + h$.

Sustituimos en la definición de derivada los dos valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h}$$

Realizamos operaciones, elevamos el binomio al cuadrado y multiplicamos por 2, después simplificamos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h}$$

Factorizamos a h: $$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h}$$

Dividimos la h y tomamos el límite: $$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x$$

Ejercicios

1. Sea $f(x) = -3x^2$ una función derivable, obtén la derivada utilizando la definición.
2. Sea $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$, una función derivable, obtén la derivada utilizando la definición.

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ una función derivable, obtén la derivada utilizando la definición.

Solución

El valor de x es distinto de cero.

Tenemos $f(x) = \frac{1}{x}$.

Obtenemos $f(x + h) = \frac{1}{x + h}$

Sustituimos en la definición de derivada los dos valores:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Realizamos operaciones en el numerador:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h}$$

Reducimos términos semejantes y efectuamos la división de fracciones $h = \frac{h}{1}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x}$$

Dividimos la h y tomamos el límite: $$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}$$

Ejercicios

Sea $f(x)$ una función derivable, obtén la derivada de los siguientes ejercicios utilizando la definición.

1. $f(x) = \frac{2}{x}$
2. $f(x) = \frac{2}{x+1}$
3. $f(x) = \frac{2}{x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \frac{-6}{x}$
7. $f(x) = \frac{2}{x-3}$
8. $f(x) = \frac{2}{x^3}$
9. $f(x) = \sqrt{4x}$
10. $f(x) = \sqrt{x+1}$
11. $f(x) = x\sqrt{x}$
12. $f(x) = x^3$

Con la definición de derivada podemos obtener la derivada de cualquier función que sea derivable, pero en muchos casos se puede tornar laborioso. A continuación, trabajaremos con modelos matemáticos para obtener fórmulas que nos permitan derivar funciones fácilmente.

Notación de derivadas

Existen diferentes tipos de notación para la derivada y ellas son:

Cauchy $D_x f(x)$ Lagrange y' Lagrange $f'(x)$ Leibniz $\frac{dy}{dx}$

En el mundo científico la más usual es la de Leibniz, pero para no complicarnos la vida utilizaremos la notación de Lagrange, que considero es más didáctica.

Ejercicios

a) Obtén la derivada de $f(x) = -6$.

b) Determina la derivada de $f(x) = -30$.

Derivada de la función potencia

Sea $y = x^n$ una función derivable, entonces $y' = nx^{n-1}$.

Ejemplos

Determina la derivada de las siguientes funciones utilizando la fórmula anterior:

1. $y = x^4$ $\qquad$ $y' = 4x^{4-1} = 4x^3$
2. $y = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ $\qquad$ $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \dfrac{-4}{x^5}$
3. $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}-1} = -\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}} = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^8}}$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios son muy importantes para realizar las derivadas de las funciones, por eso su gran cantidad.

a) Utilizando la definición de la derivada demuestra que:

si $f(x) = kx^n$ una función derivable entonces, $f'(x) = nk\,x^{n-1}$ para k una constante.

b) En los siguientes ejercicios debes obtener la derivada de la función:

$$y = kx^n \qquad y' = nkx^{n-1},$$

donde n y k son constantes. La derivada de la función constante $y = k$, la cual su derivada es, $y' = 0$.

1. $y = 5$
2. $y = 2$
3. $y = x$
4. $y = 2x$
5. $y = 3x$
6. $y = 4x$
7. $y = 5x$
8. $y = 6x$
9. $y = 7x$
10. $y = 8x$
11. $y = 9x$
12. $y = 10$
13. $y = -3x$
14. $y = -4x$
15. $y = -5x$
16. $y = -6x$
17. $y = -7x$
18. $y = -8x$
19. $y = -9x$
20. $y = -10$
21. $y = -9$
22. $y = 14$
23. $y = -17$
24. $y = 30$

Exponente entero

1. $y = x^2$
2. $y = x^3$
3. $y = x^4$
4. $y = x^5$
5. $y = x^6$
6. $y = x^7$
7. $y = x^8$
8. $y = 4$
9. $y = x^{10}$
10. $y = x^{11}$
11. $y = x^{-2}$
12. $y = x^{-3}$

13. $y=x^{-4}$
14. $y=x^{-5}$
15. $y=5$
16. $y=x^{-7}$
17. $y=x^{-8}$
18. $y=x^{-9}$
19. $y=x^{-10}$
20. $y=x^{-11}$

Exponente y coeficiente enteros

1. $y=2x^2$
2. $y=4x^3$
3. $y=6x^4$
4. $y=7x^5$
5. $y=8x^6$
6. $y=-9x^7$
7. $y=-5$
8. $y=-4x^9$
9. $y=-3x^{10}$
10. $y=-x^{11}$
11. $y=5x^{-2}$
12. $y=4x^{-3}$
13. $y=8x^{-4}$
14. $y=7x^{-5}$
15. $y=6x^{-6}$
16. $y=-5x^{-7}$
17. $y=-3x^{-8}$
18. $y=-4x^{-9}$
19. $y=-7x^{-10}$
20. $y=-x^{-11}$

Exponente fraccionario

1. $y=x^{\frac{1}{2}}$
2. $y=x^{\frac{1}{3}}$
3. $y=x^{\frac{1}{4}}$
4. $y=x^{\frac{1}{6}}$
5. $y=x^{\frac{1}{7}}$
6. $y=x^{\frac{1}{8}}$
7. $y=x^{\frac{1}{9}}$
8. $y=x^{\frac{1}{25}}$
9. $y=x^{\frac{1}{5}}$
10. $y=x^{\frac{1}{11}}$
11. $y=x^{-\frac{1}{2}}$
12. $y=x^{-\frac{1}{3}}$
13. $y=x^{-\frac{1}{4}}$
14. $y=x^{-\frac{5}{6}}$
15. $y=x^{-\frac{1}{7}}$
16. $y=x^{-\frac{1}{8}}$
17. $y=x^{-\frac{1}{9}}$
18. $y=x^{-\frac{1}{25}}$
19. $y=x^{-\frac{1}{5}}$
20. $y=x^{-\frac{1}{11}}$

Exponente fraccionario y coeficiente entero

1. $y=-x^{\frac{3}{2}}$
2. $y=5x^{\frac{5}{3}}$
3. $y=-x^{\frac{3}{4}}$
4. $y=x^{\frac{5}{6}}$
5. $y=-x^{\frac{3}{7}}$
6. $y=-x^{\frac{3}{8}}$
7. $y=x^{\frac{4}{9}}$
8. $y=-x^{\frac{7}{25}}$
9. $y=x^{\frac{2}{5}}$
10. $y=-x^{\frac{3}{11}}$
11. $y=6x^{-\frac{5}{2}}$
12. $y=-3x^{-\frac{17}{3}}$
13. $y=3x^{-\frac{9}{4}}$
14. $y=x^{-\frac{15}{6}}$
15. $y=-8x^{-\frac{14}{7}}$
16. $y=x^{-\frac{9}{8}}$
17. $y=-4x^{-\frac{2}{9}}$
18. $y=x^{-\frac{15}{25}}$
19. $y=-6x^{-\frac{9}{5}}$
20. $y=x^{-\frac{6}{11}}$
21. $y=5x^{\frac{1}{2}}$
22. $y=3x^{\frac{1}{3}}$
23. $y=6x^{\frac{1}{4}}$
24. $y=-5x^{\frac{1}{6}}$
25. $y=-3x^{\frac{1}{7}}$
26. $y=-16x^{\frac{1}{8}}$
27. $y=6x^{-\frac{1}{2}}$
28. $y=-3x^{-\frac{1}{3}}$
29. $y=5x^{-\frac{1}{4}}$
30. $y=-7x^{-\frac{1}{6}}$
31. $y=5x^{-\frac{1}{7}}$
32. $y=-4x^{-\frac{1}{8}}$

Exponente y coeficiente fraccionario (recuerda operaciones con fracciones)

1. $y = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{9}}$
2. $y = \frac{5}{6}x^{\frac{1}{25}}$
3. $y = \frac{9}{5}x^{\frac{1}{5}}$
4. $y = x^{\frac{1}{11}}$
5. $y = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{9}}$
6. $y = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{25}}$
7. $y = -\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{5}}$
8. $y = -\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{11}}$
9. $y = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$
10. $y = -\frac{3}{2}x^{\frac{5}{3}}$
11. $y = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{4}}$
12. $y = -\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}}$
13. $y = \frac{6}{5}x^{-\frac{5}{2}}$
14. $y = -\frac{3}{2}x^{-\frac{17}{3}}$
15. $y = \frac{4}{3}x^{-\frac{9}{4}}$
16. $y = -\frac{6}{5}x^{-\frac{15}{6}}$

En los siguientes ejercicios los resultados los debes de expresar con **exponentes positivos** y **enteros**, para lo cual debes recordar las propiedades de los exponentes.

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\qquad$ $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\qquad$ $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ $\qquad$ $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

1. $y = \frac{1}{x^2} =$
2. $y = \frac{3}{x^4} =$
3. $y = \frac{7}{x^4} =$
4. $y = \frac{9}{x^3} =$
5. $y = \frac{6}{x^7} =$
6. $y = \frac{4}{7x^8} =$
7. $y = \frac{7}{4x^5} =$
8. $y = \frac{\sqrt{5}}{5x^5} =$
9. $y = \sqrt{x^3}$
10. $y = \sqrt{x^5}$
11. $y = \sqrt[3]{x^2}$
12. $y = \sqrt[6]{x^7}$
13. $y = 3\sqrt[5]{x^2}$
14. $y = 4\sqrt[8]{x^3}$
15. $y = 5\sqrt[7]{x^3}$
16. $y = \frac{2}{\sqrt{x}} =$
17. $y = \frac{8}{\sqrt{x^5}} =$
18. $y = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} =$
19. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}} =$
20. $y = \frac{-2}{\sqrt[7]{x^4}} =$
21. $y = \frac{2}{\sqrt[8]{7x^3}} =$
22. $y = \frac{5}{6\sqrt[5]{x^3}} =$
23. $y = -\frac{1}{x^2} =$
24. $y = -\frac{5}{x^3} =$
25. $y = -\frac{5}{x^4} =$
26. $y = -\frac{10}{x^4} =$
27. $y = -\frac{1}{x^9} =$
28. $y = -\frac{2}{7x^7} =$
29. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3x^5} =$
30. $y = \sqrt{x}$
31. $y = \sqrt{x^4}$
32. $y = \sqrt{x^6}$
33. $y = \sqrt[4]{x^5}$
34. $y = \sqrt[7]{x^6}$
35. $y = -7\sqrt[5]{x^3}$
36. $y = -7\sqrt[7]{x^2}$
37. $y = -2\sqrt[4]{x^3}$

38. $y=-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}=$

39. $y=-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}=$

40. $y=-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}=$

41. $y=-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}=$

42. $y=-\frac{3}{\sqrt[2]{x}}=$

43. $y=-\frac{-3}{\sqrt[4]{2x^3}}=$

44. $y=-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{2x^3}}=$

45. $y=\sqrt{2}\,\sqrt{3}=$

46. $y=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=$

Derivada de la función suma

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, la derivada de la suma de las dos funciones es: $f'(x)+g'(x)$.

Por lo que decimos que la derivada de la suma de dos funciones es igual a la derivada de cada una de las funciones.

Ejemplos

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $y=2x^2+3x+5$ $\qquad y'=4x+3+0=4x+3$
2. $y=\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{5}x^2+\sqrt{x}$ $\qquad y'=5x^3-\frac{6}{5}x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejercicios

Determina la derivada de la suma de funciones.

1. $f(x)=x-2$
2. $f(x)=3x-4$
3. $f(x)=x^2$
4. $f(x)=3x^2-3x$
5. $f(x)=3x^2-4x+3$
6. $f(x)=x^3+5x+5$
7. $f(x)=x^5+2x^2+7$
8. $f(x)=x^{-3}+5x^{-2}+15$
9. $f(x)=x^{-5}+5x^{-2}-x^{-1}$
10. $f(x)=2x^{-4}+6x^{-2}-5x-1$
11. $f(x)=\frac{4}{5}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{7}x$
12. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{7}x$
13. $y=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^4}$
14. $y=\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^2}$
15. $y=\frac{5}{x^3}-\sqrt{x^6}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}$
16. $f(x)=x-4$
17. $f(x)=4x-5$
18. $f(x)=2x^2$
19. $f(x)=x^2-4$
20. $f(x)=4x^2+2x-5$
21. $f(x)=14x^2+5x-3$
22. $f(x)=14x^6+6x^3-4x$
23. $f(x)=4x^{-4}+7x^5-13$
24. $f(x)=9x^{-8}+7x^{-6}-3x$
25. $f(x)=9x^{-7}-3x^{-4}-3x^{-2}-x+5$
26. $f(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{7}x$
27. $f(x)=\frac{5}{2}x^7-\frac{3}{5}x^4+\frac{4}{5}x^3$
28. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x^5}-\sqrt{x^6}$
29. $y=\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^4}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$
30. $y=\frac{8}{3x^4}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^5}}$

Derivada del producto de dos funciones

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en un intervalo, la función $(fg)'(x)$ es derivable en ese intervalo.

$$D_x(f \cdot g)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Otra forma de escribirlo es:

Si $f(x) = u$ y $g(x) = v$; u y v son funciones de x. Escribimos: $D_x(uv) = uv' + u'v$ (a)

Ejemplo

Obtén la derivada de la siguiente función: $f(x) = (2x - 5)(4x + 3)$.

Lo primero que conviene hacer es determinar cuál es "u" y "v" y obtener la derivada de cada uno.

$u = 2x - 5$ $\qquad u' = 2$

$v = 4x + 3$ $\qquad v' = 4$

Al sustituir en $D_x(uv) = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} &= 2(4x + 3) + 4(2x - 5) \\ &= 8x + 6 + 8x - 20 \\ &= 16x - 14 \end{aligned}$$

Ejercicios

I. Obtén la derivada de la siguiente función: $f(x) = (x - 3)(x + 5)$.

II. Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = (3x + 8)(x + 7)$
2. $f(x) = (x^2 + x)(6x + 1)$
3. $f(x) = (x^3 + 5)(2x + 5)$
4. $f(x) = \left(8\sqrt{x^4} + 2\right)(2x + 4)$
5. $f(x) = \left(4\sqrt[6]{x^7} + 4\right)\left(2\sqrt[6]{x^7} + 8\right)$
6. $f(x) = (9x - 2)(2x^3 + 4)$
7. $f(x) = (x^2 + 8)(4x^3 - 3)$
8. $f(x) = \left(\sqrt{x^3} + 8x\right)(x^2 + 7)$
9. $f(x) = (6x - x^3)\left(2\sqrt{x^6} + x\right)$
10. $f(x) = \left(\sqrt[2]{x^3} + 8\right)(x + 7x^4) - 4x^2 - 5$
11. $f(x) = (8x + 2)(2x + 4)$
12. $f(x) = (2x^2 + 8)(4x + 4)$
13. $f(x) = \left(\sqrt{x^3} + 8\right)(x + 7)$
14. $f(x) = (6x + 1)\left(\sqrt{x^6} + x\right)$
15. $f(x) = (2x^2 + 8)(x^3 + 7x)$
16. $f(x) = (x^2 + x)(6x^3 - 2)$
17. $f(x) = (3x^3 + 5x)(2x^2 + 5)$
18. $f(x) = \left(6\sqrt{x^4} + 2x^2\right)(3x + 4)$
19. $f(x) = \left(5\sqrt[6]{x^7} - 4\right)\left(3\sqrt[6]{x^7} - 8x\right)$
20. $f(x) = \left(7x\sqrt{x^4} + 2\right)(2x + 4) + 2x^5 - 3$
21. $f(x) = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)$

Derivada del cociente de dos funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función derivable.

$$D_x\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Otra forma de escribir la derivada del cociente: Si $f(x) = u$ y $g = v$; funciones diferenciales escribimos:

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+5}$. Encuentra la derivada:

Solución

Definimos $\quad u = 3x + 2 \qquad u' = 3$

$\qquad v = x^2 + 5 \qquad v' = 2x$

Sustituimos y realizamos operaciones.

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{3(x^2+5) - 2x(3x+2)}{(x^2+5)^2} = \frac{3x^2 + 15 - 6x^2 - 4x}{(x^2+5)^2} = \frac{-3x^2 - 4x + 15}{(x^2+5)^2}$$

Ejercicio

Sea $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x^2-4}$. Encuentra la derivada.

Ejemplo

Calcula la derivada de $y = \dfrac{4x-3}{5x^2-3x}$

$u = 4x - 3 \qquad u' = 4$

$v = 5x^2 - 3x \qquad v' = 10x - 3$

Al sustituir en la fórmula de la derivada del cociente:

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{4(5x^2-3x) - (4x-3)(10x-3)}{(5x^2-3)^2} = \frac{20x^2 - 12x - 40x^2 + 12x + 30x - 9}{(5x^2-3)^2} = \frac{-20x^2 + 30x - 9}{(5x^2-3)^2}$$

Ejercicios

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$
2. $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{5x+4}$
3. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
4. $f(x)=\dfrac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$
5. $f(x)=\dfrac{9x-20}{3\sqrt{x}-2\sqrt{5}}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2-2\sqrt{3x}+3}{x+\sqrt{3}}$
7. $f(x)=\dfrac{5x-2}{\sqrt{x}-5}$
8. $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-\sqrt{9}}$
9. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$
10. $f(x)=\dfrac{5x^2-7}{3x+5}$
11. $f(x)=\dfrac{x-121}{\sqrt{x}-11}$
12. $f(x)=\dfrac{x-32}{\sqrt{x}-4\sqrt{2}}$
13. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x+3}$
14. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-12}$
15. $f(x)=\dfrac{x-64}{\sqrt{x}-8}$
16. $f(x)=\dfrac{x-18}{\sqrt{x}-3\sqrt{2}}$
17. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{x-3}$
18. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}$

Derivada de una composición de funciones

También conocida por la regla de la cadena, se utiliza para funciones compuestas.

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$ entonces:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

Combinaremos la regla de la cadena con la regla de la potencia. Si n es cualquier número real y $u=g(x)$ diferenciable, entonces:

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{o bien} \qquad f(x)=u^n \qquad f'(x)=nu^{n-1}u'$$

Ejemplo

Obtén la derivada de la función $f(x)=(3x-5)^5$.

Solución

Definimos $u=3x-5$, por lo que su derivada es $u'=3$.

Sustituimos en la fórmula:

$$f(x)=u^n \qquad f'(x)=nu^{n-1}u'$$

$$f'(x)=5(3x-5)^4(3)$$
$$f'(x)=15(3x-5)^4$$

Ejercicio

Determina la derivada de la función $f(x)=(9x^3-7)^8$.

Ejemplo

Obtén la derivada de la función $f(x) = (4x^3 + 6)^{10}$.

Solución

Definimos $u = 4x^3 + 6$, por lo que su derivada es $u' = 12x^2$.

Sustituimos en la fórmula:

$$f(x) = u^n \qquad f'(x) = nu^{n-1}u'$$

$$f'(x) = 10(4x^3 + 6)^9(12x^2)$$

$$f'(x) = 120x^2(4x^3 + 6)^9$$

Ejercicios

Encuentra la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = (2x - 3)^4$
2. $y = (3x - 3)^5$
3. $y = (x - 23)^9$
4. $y = (6x - 36)^6$
5. $y = 4(25x^2 - 52)^{41}$
6. $y = 5(5x^2 - 13)^{12}$
7. $y = \left(\dfrac{5}{3}x^3 - 16x^7\right)^9$
8. $y = \left(\dfrac{7}{8x} - 9x\right)^5$
9. $f(x) = \left[\left(\dfrac{2}{3}x - 6\right)\left(\dfrac{3}{2}x + 7\right)^4\right]$
10. $y = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^6 2x$
11. $y = (\sqrt{x} - 3)^7 \sqrt{x}$
12. $f(x) = \dfrac{(3x^2 - 5)^2}{2x + 1}$
13. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7}{(3x + 6)^5}$
14. $f(x) = \dfrac{(6x - 2x)^4}{\sqrt{x} - 9}$
15. $f(x) = \dfrac{7x - 2}{4\sqrt{x} - 3\sqrt{5}}(3x - 1)^5$
16. $f(x) = \dfrac{9x - 1}{7\sqrt{x^3} - \sqrt{5}}(3x^2 - 1)^5$
17. $f(x) = \dfrac{5x - 9}{4\sqrt{x}}(3x^5 - x^3)^6$
18. $f(x) = \sqrt{x}\,(2x - 1)^6 x$
19. $f(x) = (x - \sqrt{x})(2x - 1)^6$
20. $f(x) = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right)(4x - 5)^7$

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

Lee el artículo que aparece en el siguiente link:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665–24362011000300002

Actividades a realizar.

1. Lee el artículo y escribe las palabras que no entiendas, y busca su significado.

2. Una vez cubierto el punto anterior, contesta las preguntas siguientes.

a) En el artículo propuesto, ¿cuál es la idea del autor al escribirlo?

b) ¿Con el resumen obtienes una idea clara de lo que trata el artículo?

c) ¿Para qué se utiliza la palabra clave?

d) ¿Cómo consideras el artículo, muy elevado o adecuado para ti?

e) ¿Geométricamente qué significado tiene para ti el concepto de valor absoluto?

f) Escribe la definición formal de límite.

g) Interpreta gráficamente la definición de límite y escríbela con tus palabras.

h) ¿La preparación que tienes en este tema te permite entender claramente los conceptos planteados en el tema "Límite de una función en el infinito"?

i) Realiza la actividad que se propone en el tema "Límite de una función en el infinito".

j) Contesta la cuestión 1.

k) La cuestión 4 se refiere a la definición de...

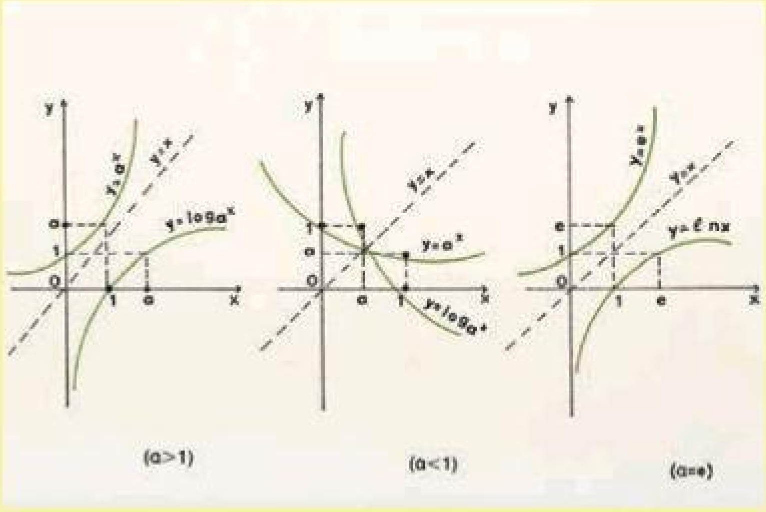
l) Cuándo se habla de límites laterales se refiere a ¿qué tipo de límites?

m) Explica con tus palabras la cuestión 8.

n) Usando la simbología de límite, ¿cómo escribirías la cuestión 8?

o) Contesta la cuestión 10.

p) Al final del artículo aparece la liga **anexo** antes de agradecimientos, utiliza la liga y contesta el cuestionario.



CIERRE

EVALUACIÓN SUMATIVA

I. Encuentra los siguientes límites utilizando el método de tabulación.

1. $\lim_{x\to 3}(3x^2 - x + 5) =$
2. $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2 - 4} =$

II. Encuentra los siguientes límites utilizando las diferentes propiedades.

1. $\lim_{x\to 5}(3x - 15) =$
2. $\lim_{x\to -5}(5x - 9) =$
3. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 9}{2x - 6} =$
4. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2 - 16}{x + 4} =$
5. $\lim_{x\to -5}\dfrac{x^2 - 25}{x - 5} =$
6. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} =$
7. $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2 - 4} =$
8. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{12x^3 + 2x + 2}{6x^2 + 5} =$

III. Determina $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$ para las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x - 1$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x - 5}$

IV. Determina si son continuas o no las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 + x - 5$
2. $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x - 3} =$

V. Indica el punto o puntos donde la función no es continua.

1. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{x + 9} =$
2. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{x^2 - 25} =$
3. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 6x + 9} =$
4. Escribe las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua.
5. ¿Qué diferencia existe entre obtener $f(a)$ y el límite de la función?

1. AUTOEVALUACIÓN

Aspecto a evaluar	Excelente	Bueno	Regular	Satisfactorio
Realicé los ejercicios correctamente	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Trabajé en equipo	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Actividad integradora (ver puntaje)	Valor: 10 puntos	Valor: 7 puntos	Valor: 4 puntos	Valor: 2 puntos
Lectura	Contesté correctamente más de 90% de las preguntas. Valor: 5 puntos	Contesté correctamente entre 80 y 89% de las preguntas. Valor: 4 puntos	Contesté correctamente entre 70 y 79% de las preguntas. Valor: 3 puntos	Contesté correctamente menos de 70% de las preguntas. Valor: 2 puntos
Trabajo extraclase	Realicé todas mis tareas. Valor: 5 puntos	Realicé 80% de mis tareas. Valor: 4 puntos	Realicé 60% de mis tareas. Valor: 3 puntos	Realicé 50% de mis tareas. Valor: 2 puntos
Suma de puntos por columna				
Total de las columnas	De 45 a 50 puntos	De 40 a 44 puntos	De 35 a 39 puntos	Menos de 35 puntos

2. AUTOEVALUACIÓN DISCIPLINAR

Revisa la actividad y contesta el dominio que tienes de los siguientes conceptos.

Concepto	Lo domino	No lo domino
Propiedades de los límites.		
Límite de una función directa.		
Límite de una función, indeterminaciones 0/0 y ∞/∞.		
Continuidad de una función.		
Derivadas algebraicas.		

PARTE 3

EJE

Pensamiento y lenguaje variacional

TERCERA **PARTE**

A continuación se presentan los elementos que definen el trabajo que vamos a realizar en este Eje.

Componentes

- Cambio y predicción: elementos del Cálculo.

Aprendizajes esperados

- Localiza los máximos, mínimos y las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.

Contenido central

- Graficación de funciones por diversos métodos. Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

Productos esperados

- Localizar en el plano cartesiano las regiones de crecimiento y de decrecimiento de una función dada en un contexto específico. (Considerar diferentes ejemplos.)
- Calcular el máximo de la trayectoria en el tiro parabólico.

Contenidos específicos

3.1 Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada. ¿Dónde se crece más rápido?

3.2 Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión? ¿Podrías recortar el papel siguiendo esa gráfica?, ¿qué observas?

APERTURA

Evaluación diagnóstica

1. Obtén el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si $f(x) = x$ ( )

   a) x *b*) 1 *c*) $2x$ *d*) 0

2. Obtén el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{\text{h}}$, si $f(x) = x^2$ ( )

   a) 0 *b*) 1 *c*) x *d*) $2x$

3. Da un punto de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ ( )

   a) $x = -2$ *b*) $x = 6$ *c*) $x = 4$ *d*) $x = 0$

4. Indica si es continua la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ ( )

a) Sí es continua
b) Tiene doble discontinuidad
c) No es continua
d) Es creciente

5. Obtén el $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ ( )

a) Indeterminado
b) $\dfrac{0}{0}$
c) -6
d) 6

6. Determina el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ ( )

a) $\dfrac{1}{2}$
b) $\dfrac{0}{0}$
c) -2
d) 2

7. Obtén el $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$ ( )

a) -1
a) -7
c) $\dfrac{0}{0}$
d) 3

8. Determina el $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} =$ ( )

a) ∞
b) 0
c) $-\infty$
d) 1

9. Obtén el $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x + 21}{x^4 - 3} =$ ( )

a) 0
b) -1
c) Indeterminado
d) $\dfrac{\infty}{\infty}$

10. La función $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ ¿es continua en $x = -2$? ¿Por qué? ( )

a) $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x + 2}$
d) $f(-2)$ No existe
c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x + 2}$ No existe
d) Indeterminado

Tema integrador

Situación didáctica

Deduce y aprende

El frijol (continuación)

Apertura de la actividad

Propósito: Desarrollar las habilidades del alumno en la investigación aplicada a la solución de problemas reales.

Material: La información obtenida en la primera parte de la actividad integradora.

Desarrollo de la actividad

1. Con los equipos que se formaron continúa el trabajo de la primera parte.
2. No olviden que tienen que integrar en el portafolio de evidencias todo lo relativo a la investigación.
3. El proyecto se divide en dos etapas: La primera es la documental y la toma de datos. La segunda es la presentación de la información y del proyecto.
4. La primera se realiza con la primera parte y la segunda la realizarás en esta cuarta parte.

Etapa de investigación documental

- Historia del frijol.
- La familia a la que pertenece.
- Los diferentes tipos de frijol que existen en el mundo, en América y en México.
- Los valores nutricionales.
- Importancia económica.
- Cultivo.
- Los fertilizantes.
- Las plagas que lo afectan.
- Etcétera.

Investigación de campo

- De cada una de las clases de frijoles que sembraste realiza su tabla y su gráfica, preferentemente todas las gráficas deben de ser en un solo plano de coordenadas cartesianas.
- Al formar tu portafolio de evidencias, no se te olvide incluir las evidencias, como son fotografías, videos, etcétera.

Cierre de la actividad

Contesta las siguientes preguntas:

1. Tomando en cuenta el intervalo de tiempo para realizar la toma de las mediciones de crecimiento de la planta de frijol, realiza los cocientes de la razón de cambio, los cuales determinan la velocidad de crecimiento.

$$\frac{C_f - C_i}{h}$$

   Donde C representa el crecimiento de la planta (f) final, (i) inicial y h intervalo de tiempo en horas.

2. Determina en qué intervalo de tiempo el crecimiento de la planta fue mayor.
3. Determina en qué intervalo de tiempo el crecimiento de la planta fue menor.
4. Realiza la presentación del proyecto.

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Formen equipos de cinco alumnos.	• Formen su portafolio de evidencias.	• Escriban en el cuaderno el análisis que hicieron sobre la situación didáctica.
• Lean la secuencia didáctica que se plantea.	• Analicen la información obtenida de la investigación. • Diseñen los instrumentos para agrupar la información que se requiere. • En equipo discutan la forma de realizar la investigación documental. • En equipo discutan los tipos de frijoles que sembrarán. • Discutan en equipo cómo realizarán las actividades para la siembra de los frijoles. • En equipo discutan las condiciones del experimento.	• Tracen un mapa mental. • Realicen la toma de datos, consistente en medir el crecimiento de la planta dos veces al día a la misma hora • Elaboren una tabla con los datos obtenidos: día / hora, crecimiento. • Realicen una comparación del crecimiento de cada una de las plantas y establezcan las causas de estas diferencias. • Tracen una gráfica del crecimiento de cada una de las plantas.
• Analicen la actividad que se plantea.	• Analicen la importancia de realizar este tipo de proyectos y anoten sus conclusiones. • Determinen los instrumentos de presentación gráfica. • Recuerden incluirlos en la presentación de la información.	• Realicen una presentación del proyecto, en el que se incluyan las evidencias formuladas al utilizar fotografías, video, etcétera. • Anoten sus conclusiones.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Documento

Instrumento: Rúbrica

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Análisis de la situación didáctica	Realiza una investigación completa de la situación.	Realiza una investigación clara y convincente.	La investigación no es clara y sólo se presentan recortes de páginas web.	La investigación es deficiente y no aporta conocimientos claros.
Desarrollo del tema integrador	Hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones son correctas.	Hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados. Sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados. Sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta no están bien fundamentados. No tiene conclusiones.

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Presentación de resultados	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son claras. Presenta los datos de las cinco plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones son escasas. Presenta por lo menos los datos de cuatro plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones no son claras. Presenta por lo menos datos de las tres plantas de frijol.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas, sus conclusiones no son claras. Presenta dos o menos plantas de frijol.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Actividad: Exposición

Instrumento: Rúbrica

Valor: 40

Criterios	Estándares		
Presentación	Destaca su organización y comprensión del proyecto. La exposición fue clara. El grupo siempre se interesó por el tema. Valor: 15 puntos.	Fue adecuada y con cierta organización. El grupo pudo entender la mayor parte de lo que se dijo. Valor: 8 puntos.	Presentación mal preparada. Información desorganizada e incompleta. El grupo no prestó atención a la exposición. Valor: 4 puntos.
Cualidades de la expresión oral	Correcta dicción, volumen adecuado; estableció contacto visual con el grupo; empleó correctamente el lenguaje kinésico y proyectó confianza. No incurrió en el uso de muletillas. Valor: 15 puntos.	Demostró poca confianza ya que evitaba el contacto visual con el grupo. Empleó correctamente el lenguaje kinésico. Ocasionalmente se observó el uso de muletillas. El volumen fue adecuado. Valor: 8 puntos.	Demostró inseguridad, empleó muletillas; usó un volumen bajo de la voz y no se observó control del lenguaje kinésico. Valor: 4 puntos.
Tiempo	Duró el tiempo asignado. Valor: 5 puntos.	Duró, aproximadamente, el tiempo asignado. Valor: 3 puntos.	La presentación fue muy breve o muy extensa. Valor: 1 punto.
Material de apoyo	Presentó lenguaje icónico para reforzar lo expresado verbalmente. El material contuvo palabras acordes al nivel del receptor y ortografía. Colocó solamente los datos relevantes. Valor. 5 puntos.	Presentó lenguaje icónico, pero el material estuvo recargado de información. Tuvo errores ortográficos. Contuvo palabras acordes al nivel del receptor. Valor: 3 puntos.	Presentó material con ausencia de lenguaje icónico. Contuvo errores ortográficos y descuidó el nivel del receptor. Valor: 1 punto.

Propósito

Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que den solución a problemas surgidos de la actividad humana aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

¿Qué aprenderás?

- Graficación de funciones por diversos métodos.
- Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.
- Criterios de optimización:
- Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

¿Para qué te servirá?

El cálculo diferencial es una de las herramientas más importantes en el mundo científico por el sinnúmero de aplicaciones que se tienen en todo proceso de cambio. Asimismo, el cálculo diferencial lo aplicarás en todas las cosas que sufren cambios de posición, por ejemplo, en la determinación de la velocidad con la que cambian los virus de una enfermedad, los cambios climáticos, la variación de la moneda. También podrás calcular los máximos y mínimos de funciones para la optimización de diversas situaciones.

Actividad socioemocional

En el trabajo:

1. ¿Cuál es la forma de trabajo que más te agrada?

2. ¿En cuál de ellas tu atención es mayor?

3. ¿A qué lo atribuyes?

4. ¿Te consideras un alumno disperso?

DESARROLLO

3.1 Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada. ¿Dónde crece más rápido?

Comportamiento de una función

Funciones crecientes y decrecientes

Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo $I = (a, b)$ si se verifica que:

$f'(x) > 0$ en un intervalo I, entonces f es creciente en ese intervalo.

$f'(x) < 0$ en un intervalo I, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Ejemplo

Determina si la función $y = x^2 - 7x + 2$ es creciente o decreciente en $x = 2$.

Solución

Lo primero que obtenemos es la derivada: $y' = 2x - 7$

Evaluamos la función derivada en $x = 2$: $y' = 2(2) - 7 = -3 < 0$

La función es decreciente en $x = 2$, ya que la derivada de la función en este punto es negativa.

Ejercicio

Determina si la función $y = x^2 + 5x - 3$ es creciente o decreciente en $x = -2$.

Ejemplo

Encuentra si la función $y = x^3 + 5x - 3$ es creciente o decreciente en $x = -4$.

$$y' = 3x^2 + 5$$

En $x = 4$ tenemos que el valor es $y' = 3(4)^2 + 5 = 53$

La función es creciente en $x = 4$, pues la derivada de la función en este punto es positiva.

Ejercicios

I. Determina si la función $y = 2x^3 + 3x - 2$ es creciente o decreciente en $x = -4$.

II. Encuentra si la función es creciente o decreciente en el punto que se indica.

1. $f(x) = x - 2$ $\quad p(2, y)$
2. $f(x) = x - 4$ $\quad p(4, y)$
3. $f(x) = 3x - 4$ $\quad p(-2, y)$
4. $f(x) = 4x - 5$ $\quad p(-3, y)$
5. $f(x) = x^2$ $\quad p(1, y)$
6. $f(x) = 2x^2$ $\quad p(-1, y)$
7. $f(x) = 3x^2 - 3x$ $\quad p(8, y)$
8. $f(x) = x^2 - 4$ $\quad p(3, y)$
9. $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$ $\quad p(2, y)$
10. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$ $\quad p(6, y)$
11. $f(x) = 3x^3 - 3x$ $\quad p(8, y)$
12. $f(x) = x^3 - 4$ $\quad p(3, y)$
13. $f(x) = 3x^3 - 4x + 3$ $\quad p(2, y)$
14. $f(x) = 4x^3 + 2x - 5$ $\quad p(6, y)$

III. Determina los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 8x - 3$
2. $f(x) = -2x - 5$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2 + 2x$
6. $f(x) = x^2 - 4x$
7. $f(x) = 3x^2 - 3x - 5$
8. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
9. $f(x) = x^3 - 3x - 4$
10. $f(x) = x^3 - 4x - 1$

Máximo y mínimo relativos de una función

Sea una función $y = f(x)$ continua en el intervalo $I = [a, b]$, se dice que la función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $x \in I$, si se verifica:

$$f(x - h) < f(x) > f(x + h)$$

o sea que $f(x)$ es el valor más grande en ese intervalo que puede tomar la función.

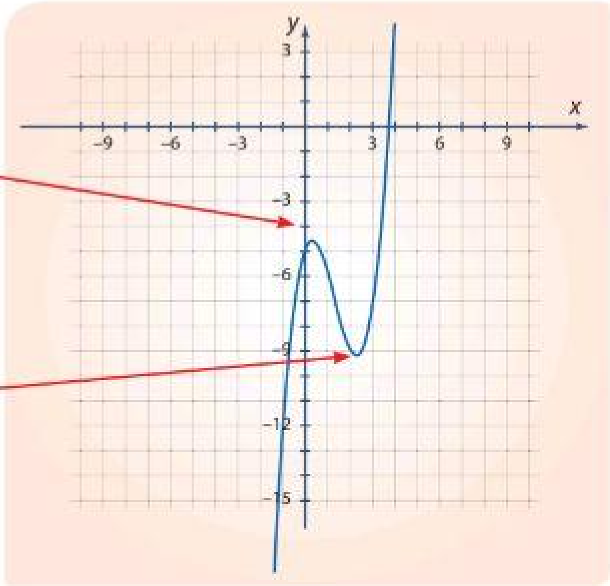
Se dice que la función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $x \in I$, si se verifica:

$$f(x - h) > f(x) < f(x + h)$$

o sea que $f(x)$ es el valor más pequeño en ese intervalo que puede tomar la función.

Observa que la recta tangente a la curva en donde están los puntos máximo y mínimo tienen pendiente cero.

Para obtener los máximos y mínimos de una función en un intervalo utilizaremos dos métodos: el de la primera derivada y la segunda derivada.



Método de la primera derivada

Este método se basa en obtener la primera derivada de la función, puesto que es la pendiente de la recta tangente a la curva y deseamos que esté en el punto más alto o bajo; la recta tangente debe ser horizontal, o sea, que la pendiente debe ser cero, de ahí que ésta se iguale a cero y se resuelva. Estos valores que obtenemos pueden ser el máximo o el mínimo; para saber esto, damos valores antes y después y utilizamos el siguiente criterio:

a) Será máximo si la función cambia de creciente a decreciente.

b) Será mínimo si la función cambia de decreciente a creciente.

Ejemplo

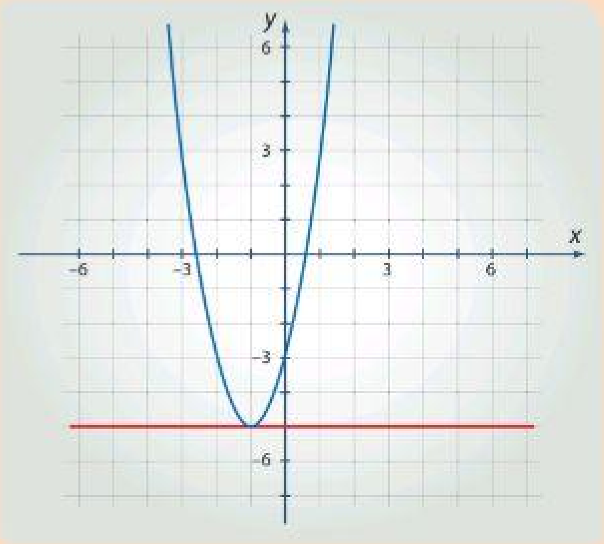
Obtén los máximos y mínimos de la función $y = 2x^2 + 4x - 3$.

Solución

Obtenemos la primera derivada: $y' = 4x + 4$

Igualamos a cero la primera derivada: $4x + 4 = 0$

Resolvemos la ecuación: $x = \frac{-4}{4} = -1$



Damos valores antes y después del –1, éstos pueden ser –2 y 2.

Evaluamos en la derivada:

$f(-2) = 4(-2) + 4 = -4 < 0$; la función es decreciente.

$f(2) = 4(2) + 4 = 12 > 0$; la función es creciente.

Observamos que la función cambia de decreciente a creciente, por lo que hablamos de un valor mínimo, el cual se encuentra en $x = -1$. Para obtener el punto, evaluamos la función en ese valor.

$$y = 2x^2 + 4x - 3$$
$$y = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 =$$
$$y = 2 - 4 - 3$$
$$y = -5$$

Por tanto el punto mínimo es $P(-1, -5)$, localízalo y márcalo con color rojo, en la gráfica.

Ejercicio

Obtén los máximos y mínimos de la función $y = -2x^2 + 4x - 3$. Traza la gráfica y la tangente donde esté el máximo o el mínimo.

Ejemplo

Determina los puntos máximos y mínimos de la función $y = x^3 - x^2$.

Obtenemos la primera derivada: $y' = 3x^2 - 2x$.

a) Igualamos a cero la primera derivada: $3x^2 - 2x = 0$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(3x - 2) = 0$.

c) De donde las soluciones son: $x = 0$ y $3x - 2 = 0$.

$$x = \frac{2}{3}$$

Podemos resolver la ecuación de segundo grado por cualquier método.

d) Damos valores antes y después del 0 y de $\frac{2}{3}$.

Para cero, los valores que tomamos son -1 y 0.5. Este valor tiene que ser menor de $\frac{2}{3}$

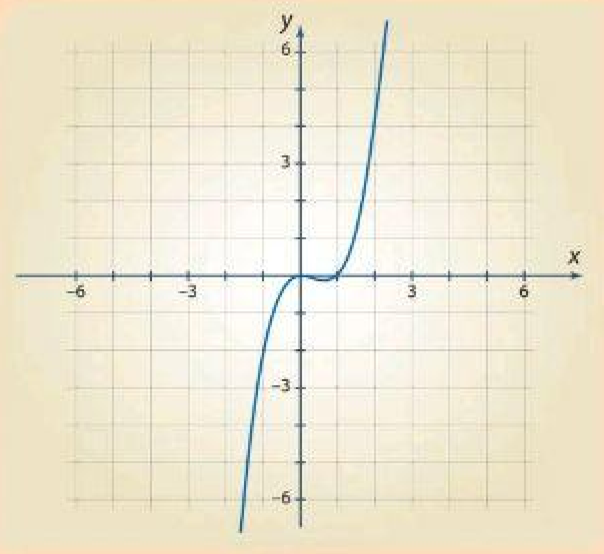
y para la segunda solución 0.5 y 1. Los valores que se toman deben de ser cercanos a los valores críticos.

Evaluamos en la derivada: $f'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5 > 0$; la función es creciente.

$f(0.5) = 3(0.5)^2 - 2(0.5) = -0.25 < 0$; la función es decreciente.

$f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$; la función es creciente.

Observamos que, en el primer cambio, la función pasó de creciente a decreciente, por tanto tiene un valor máximo (cero), en el segundo la función cambió de decreciente a creciente por lo que tenemos un valor mínimo (dos tercios).



Para encontrar los puntos sustituimos en la ecuación:

$$y = x^3 - x^2$$

Punto máximo	Punto mínimo
$y = 0^3 - 0^2 = 0$	$y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$
	$y = \left(\frac{8}{27}\right) - \left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{4}{27}$

El punto máximo es (0, 0); el punto mínimo es:

$P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$; localízalo y márcalo con color rojo en la gráfica.

Ejercicios

Encuentra los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones, utilizando el método de la primera derivada.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x$
3. $f(x) = 3x^2 - 3x - 5$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$
5. $-f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x - 52$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$
7. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
8. $f(x) = x^3$
9. $f(x) = x^2 - 4x$
10. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
11. $f(x) = x^3 - 4x - 1$
12. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
13. $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
14. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$

Método de la segunda derivada

Este método consiste en obtener la primera y segunda derivadas. La primera derivada se iguala a cero y se resuelve, los valores obtenidos se sustituyen en la segunda derivada y se utilizan los siguientes criterios:

a) Si el valor obtenido en la segunda derivada es mayor que cero entonces éste es un valor mínimo.
b) Si el valor obtenido en la segunda derivada es menor que cero entonces éste es un valor máximo.

La segunda derivada se obtiene derivando la primera derivada.

Ejemplo

Obtén los máximos y mínimos de la función $y = x^2$.

a) Obtenemos la primera y segunda derivadas: $y' = 2x$ $\quad y'' = 2$

b) La primera derivada la igualamos a cero y se resuelve: $2x = 0$ entonces $x = 0$

c) Este valor se sustituye en la segunda derivada y se utilizan los criterios correspondientes.

$$y'' = 2 > 0$$

Como este valor es mayor que cero entonces es un valor mínimo.

Cuando tenemos una ecuación de segundo grado, la segunda derivada es una constante, con lo que nos indica de inmediato si hablamos de un mínimo o un máximo.

Ejercicio

Obtén los máximos y mínimos de la función $y = 3x^2$.

Ejemplo

Determina los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - x^2 + 2$.

a) Obtenemos la primera y segunda derivada: $y' = 3x^2 - 2x$ $\quad y'' = 6x - 2$

b) La primera derivada la igualamos a cero y se resuelve. $3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

de donde se tienen dos soluciones: $x = 0$ y $3x - 2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

c) Este valor se sustituye en la segunda derivada y se utilizan los criterios correspondientes.

$$y'' = 6(0) - 2 = -2 < 0 \qquad y'' = 6\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 > 0$$

Utilizando los criterios: cero es un valor máximo y $\frac{2}{3}$ es un valor mínimo.

Para encontrar los puntos sustituimos en la ecuación:

$$y = x^3 - x^2 + 2$$

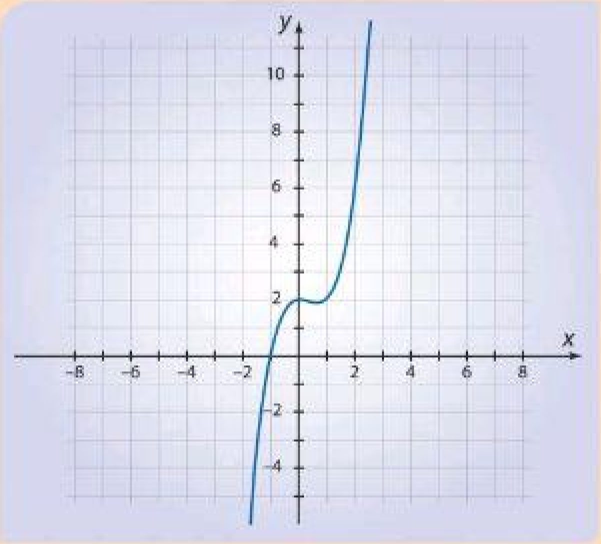
Punto máximo

$$y = 0^3 - 0^2 + 2 = 2$$

Punto mínimo

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2$$

$$y = \left(\frac{8}{27}\right) - \left(\frac{4}{9}\right) + 2 = \frac{50}{27}$$



El punto máximo es $(0, 2)$; el punto mínimo es:

$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{50}{27}\right)$; localízalo en la gráfica y márcalo con color rojo.

Si revisamos los criterios de la segunda derivada:

a) Si el valor obtenido en la segunda derivada es > 0; entonces éste es un valor mínimo.

b) Si el valor obtenido en la segunda derivada < 0; entonces éste es un valor máximo.

Pero ¿qué sucede si es igual a cero? Trata de inferir lo que pasa, para ello analiza la función:

$$y = x^3$$

Ejercicios

I. Obtén los máximos y mínimos de la función $y = x^3$.

Si llegaste a esta conclusión: Si la segunda derivada es cero entonces es un punto donde la función (curva) cambia de sentido, el cual llamamos punto de inflexión.

II. Encuentra los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones por el método de la segunda derivada.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x$
3. $f(x) = 3x^2 - x^2 + 3x - 5$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$
5. $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 45x - 52$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$

7. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
8. $f(x) = x^3$
9. $f(x) = x^2 - 4x$
10. $f(x) = 2x^2 + 2x^2 - 3x - 4$
11. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
12. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
13. $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
14. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$

3.2 Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en el punto de inflexión? ¿Podrías recortar el papel siguiendo esa gráfica? ¿Qué observas?

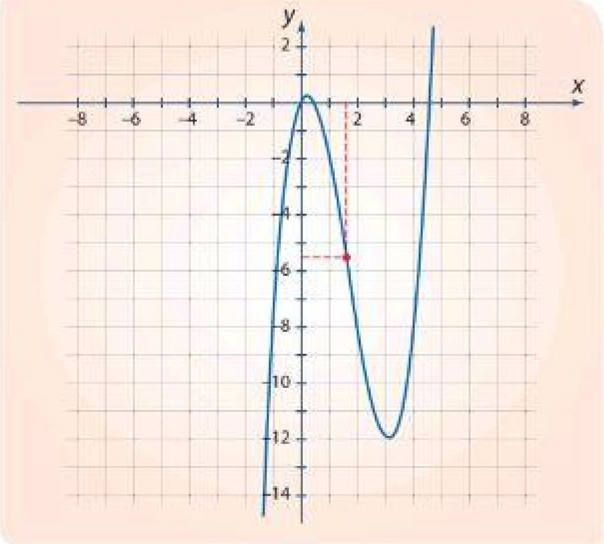
El punto donde la función (curva) cambia de sentido, lo llamamos punto de inflexión.

Para obtener el punto de inflexión de una curva se sigue este procedimiento:

a) Se obtiene la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve.

b) El valor obtenido se sustituye en la tercera derivada, si éste es diferente de cero entonces es punto de inflexión.

En la gráfica marca con color rojo el punto máximo y con azul el punto mínimo.



Ejemplo

Obtén el punto de inflexión de la función $y = x^3$.

a) Obtenemos la primera, segunda y tercera derivadas:

$$y' = 3x^2$$
$$y'' = 6x$$
$$y''' = 6$$

b) La segunda derivada la igualamos a cero y se resuelve.

$$6x = 0$$

De donde se obtienen la solución: $x = 0$

c) Este valor se sustituye en la tercera derivada, si es distinto de cero es punto de inflexión, como es el caso.

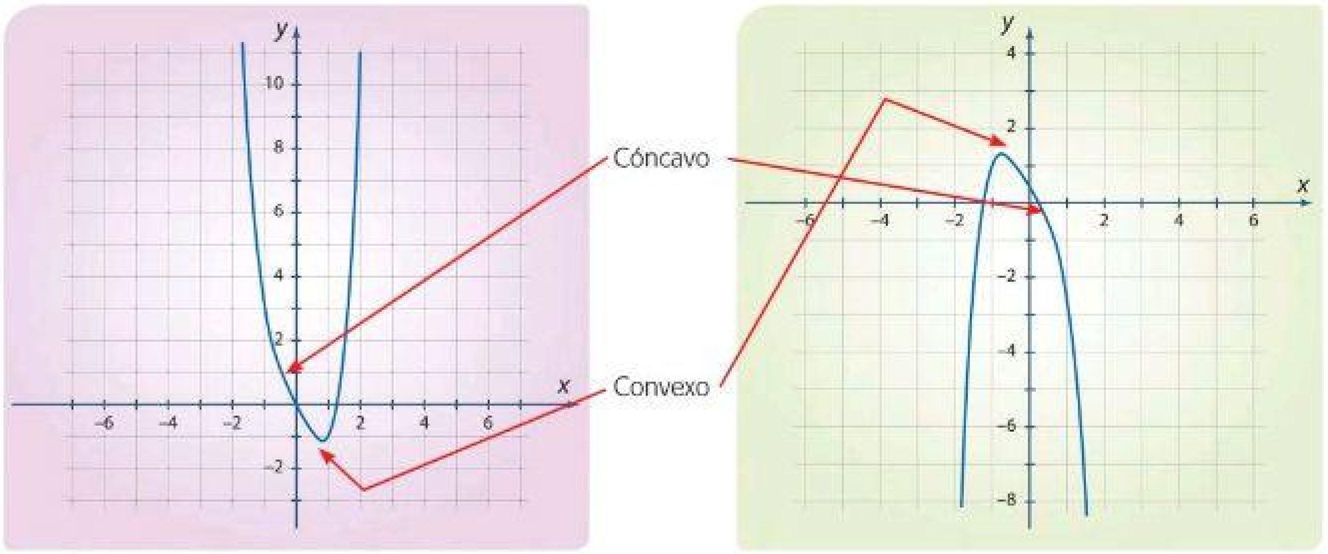
Ejercicios

Determina los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$
3. $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 45x - 52$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$
5. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
6. $f(x) = x^4 + 2x$
7. $f(x) = x^3 + x - 4$
8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
10. $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$
12. $f(x) = x^4 + 2x$

Concavidades

Concavidad es una cualidad de cóncavo, sinónimo de cóncava. Indica que tiene una parte hundida, el complementario es una convexidad.



Colorea de azul la concavidad en cada una de las gráficas.

En adelante diremos que es cóncavo hacia arriba o positivo y cóncavo hacia abajo o negativo.

Si la segunda derivada es mayor que cero, la curva es cóncava hacia arriba, y si la segunda derivada es menor que cero, la curva es cóncava hacia abajo.

Ejemplo

Determina las concavidades de la curva $y = x^3$.

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

Se resuelve la inecuación: $6x > 0$

$x > 0$

Esto indica que la concavidad es hacia arriba, está en el intervalo cero hasta infinito. Este dato nos permite conocer la concavidad hacia abajo que será en el complemento del intervalo que va desde menos infinito hasta los valores menores que cero y el punto de inflexión es donde la segunda derivada es cero.

Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo
$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) < 0$

Ejercicios

I. Determina las concavidades de las siguientes funciones.

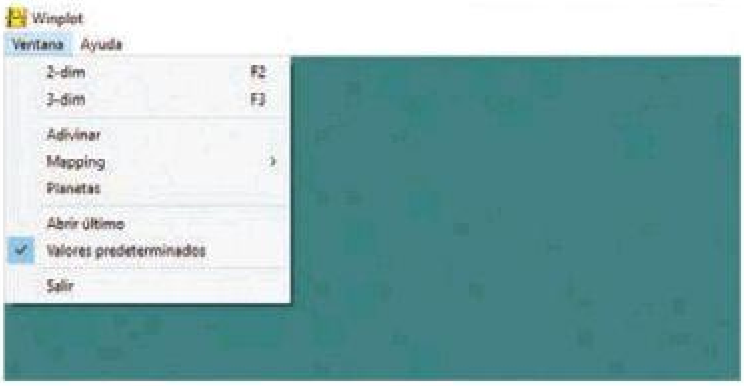
1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$
3. $f(x) = -x^3 + 12x^2 + 45x - 52$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$
5. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
6. $f(x) = x^3 + x - 4$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
8. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
9. $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
10. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$

II. Analiza las siguientes funciones y determina: intervalos de crecimientos, puntos máximos y mínimos, punto de inflexión, concavidades y con base en esto traza la gráfica de la función. Ilumina de color azul si existen las concavidades.

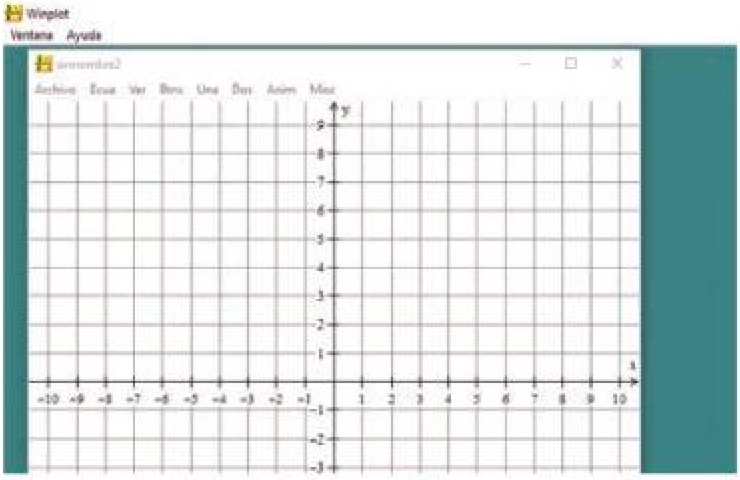
1. $f(x) = x^2 + x - 5$
2. $f(x) = -3x^2 + 3x - 4$
3. $f(x) = -x^3 - 12x^2 + 45x - 52$
4. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 16$
5. $f(x) = -x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
6. $f(x) = x^2 + x - 2$
7. $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$
8. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 12x - 7$
9. $f(x) = x^3 - 6x + 5$
10. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$

Uso del graficador Winplot

Una forma atractiva e interesante de aprender matemáticas consiste en utilizar un graficador ya que permite que se visualicen los problemas con lo que se logra un mayor entendimiento. Cuando se carga Winplot aparece la ventana de la derecha, de la cual seleccionamos 2–dim para realizar gráficas en dos dimensiones.



Ahora aparece la siguiente ventana con un sistema de ejes coordenados.



Y estamos listos para analizar una gráfica con la nueva tecnología; ojalá que esto te sirva para lograr un mayor entendimiento de esta materia que resulta muy sencilla desde este nuevo punto de vista.

Observa que este menú tiene una barra de herramientas la cual describimos someramente, para que te permita realizar gráficas, si deseas ahondar en el tema se presenta un menú de ayuda al final de cada menú de la barra de herramientas.

Este menú no es difícil de entender, te permite abrir, guardar, imprimir o copiar (para pasar a tu editor de texto compatible con Word) gráficas que tú has diseñado.

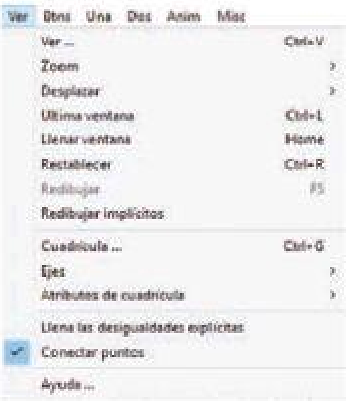
Analicemos la gráfica de $f(x) = x$ sen x; elegimos del menú ecua, $y = f(x)$.

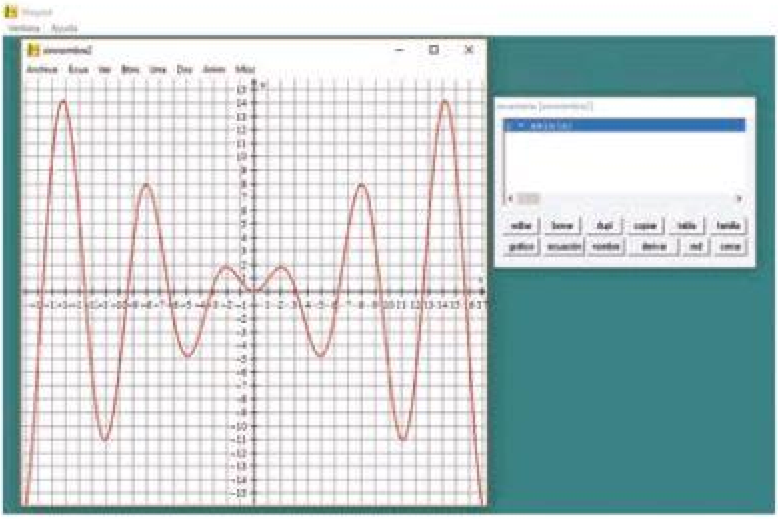
Tecleamos x sin (x) (puedes teclear cualquier función) el argumento de la función se coloca entre paréntesis.

Puedes elegir el intervalo donde deseas graficar, el ancho del lápiz y el color, inténtalo.

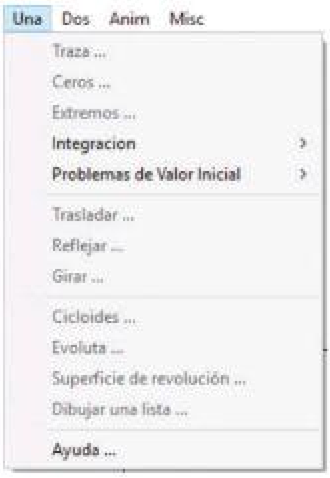
Presiona ok.

Puedes utilizar del menú ver **zoom alejar** o **zoom acercar** para ver la gráfica de la siguiente página en el intervalo [−16, 16].

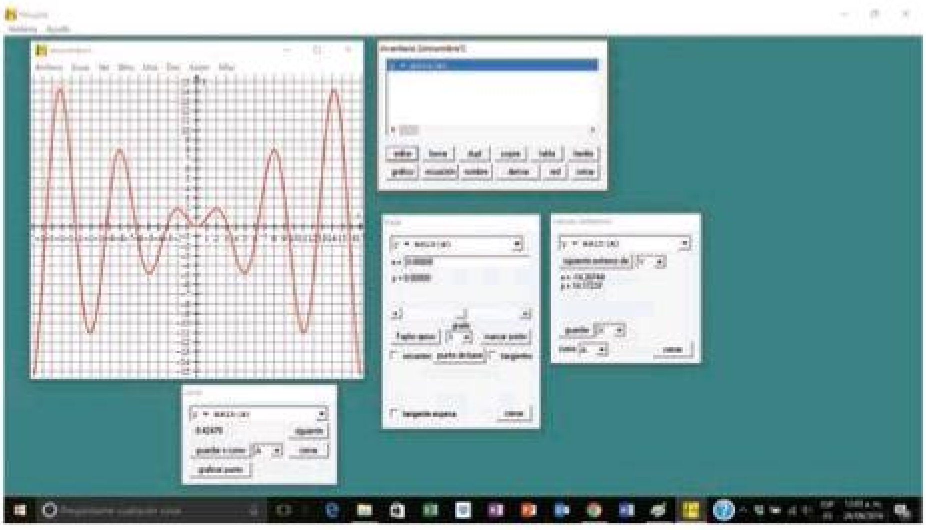




Utilicemos el menú **Una**, empecemos por **traza** que nos permite ver las tangentes a una curva, para ello elige **tangentes** y con el botón desplázalo de derecha a izquierda y observa la gráfica. Si colocas el valor de x = y enter aparece el valor de y, además de la tangente a la curva en ese punto, lo puedes utilizar como valor numérico.



Ceros nos permite ver las intersecciones con el eje x, y el menú de **extremos** los máximos y mínimos. Recuerda que las funciones trigonométricas trabajan en radianes.



Con ayuda del graficador contesta las siguientes preguntas:

Indica todos los ceros de la función que se ven en la pantalla (once) en el intervalo [−16, 16].

Indica los máximos de la función:

Indica los mínimos de la función:

Indica los intervalos donde crece la función:

Indica los intervalos donde decrece la función:

Ejercicio

Analiza la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ (se escribe como *xxx* − 4*xx*)

Indica todos los ceros de la función: ________

Indica los máximos de la función: ________

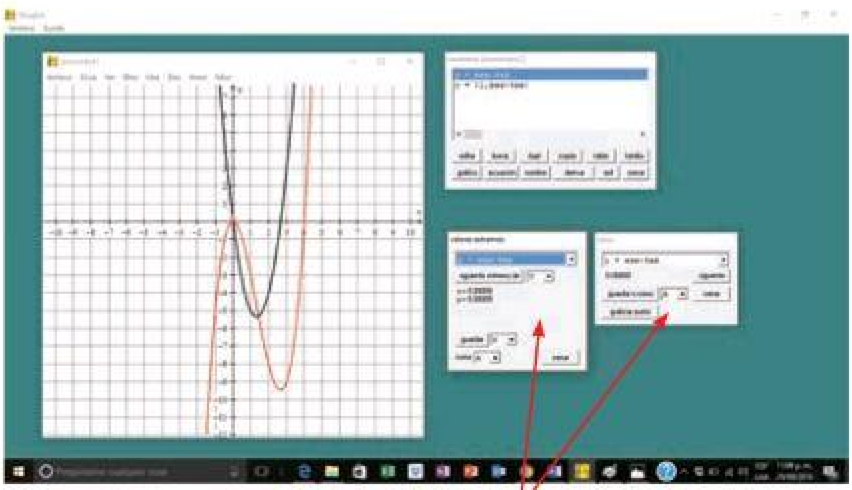
Indica los mínimos de la función: ________

Indica los intervalos donde crece la función: ________

Indica los intervalos donde decrece la función: ________

Para encontrar el punto de inflexión y las concavidades utilizaremos la opción **derivar**, aparece en el inventario sinnombre (véase la ilustración anterior).

Cuando oprimes **derivar** aparece la gráfica de la derivada, cámbiala de color para establecer una mejor relación entre las funciones.



En la ventana donde aparece la función, nos indica la que está activa. Es posible cambiarla cuando se oprime la punta de flecha.

Observa la relación que existe entre la función y la función derivada, ve las marcas.

Con base en la gráfica y utilizando los menús de ceros y valores extremos establece la relación entre:

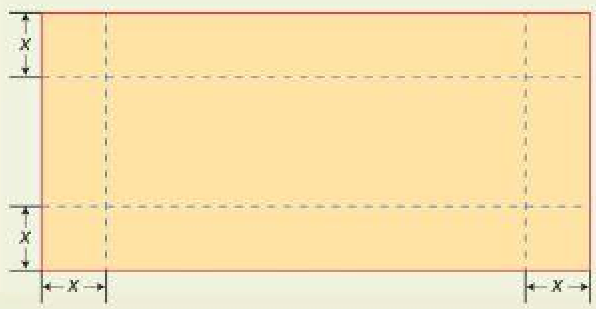
Ceros de la función derivada corresponden a ____________________ de la función.

Máximos o mínimos de la función derivada corresponden a ____________________ de la función.

Con estos datos determina, el punto de inflexión ____________________, las concavidades son: hacia arriba ____________________, hacia abajo ____________________.

ACTIVIDAD TRANSVERSAL

I. Se desea construir una caja sin tapa de volumen máximo, para ello se cuenta con láminas de cartón de 30 por 50 cm. Se van a cortar cuadros en las esquinas como se muestra en la figura.



Solución

En el problema se pide que el volumen sea máximo; el volumen de la caja es:

$$V = LAh$$

L: largo $\quad$ A: ancho $\quad$ y $\quad$ h: altura

El largo mide 50 cm, pero hay que quitarle $2x$ que son una x de cada extremo.

El ancho mide 30 cm y al igual que el largo se le quitan $2x$.

La altura estará dada por el valor de x.

Toma una hoja cualquiera y recorta los cuadros de 2 cm. Realiza los dobleces por lado sobre las líneas para formar la caja y que tengas una mejor idea de lo que haces.

El volumen de la caja está dado por: $V =$ ____________________

Realizamos el producto para realizar la derivada: $=$ ____________________

$=$ ____________________

Obtenemos la primera derivada: $V' =$ ____________________

La segunda derivada: $V'' =$ ____________________

La primera derivada se iguala a cero y se resuelve: $=$ ____________________

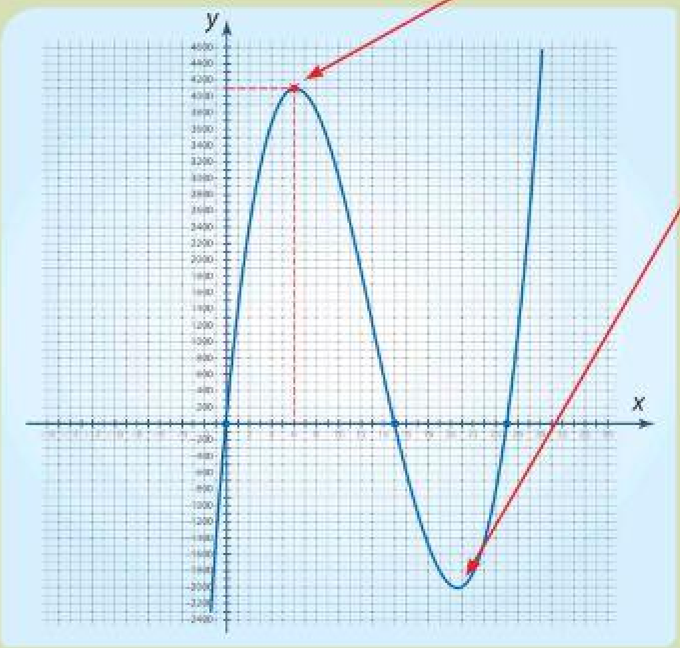
De donde se obtiene: $x_1 =$ ____________________

$x_2 =$ ____________________

Sustituimos en la segunda derivada y obtenemos los valores máximos y mínimos.

$V'' =$ ________________________ Valor máximo

$V'' =$ ________________________ Valor mínimo



El volumen es $V =$ ____________

Ejercicios

1. Se desea construir una caja de volumen máximo. Si se tiene una lámina de 20×30 cm, sin tapa, recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando las cejas para formar los lados, determina las dimensiones de la caja y el volumen.
2. Se desea construir una caja de volumen máximo. Si se tiene una lámina de 40×40 cm, sin tapa, recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando las cejas para formar los lados, determina las dimensiones de la caja y el volumen.
3. Se desea construir una caja de volumen máximo. Si se tiene una lámina de 60×40 cm, con tapa, recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando las cejas para formar los lados, la tapa debe tener laterales de la misma altura de la caja para formar una caja sellada. Determina las dimensiones de la caja y el volumen.

II. Determina las dimensiones que debe tener una caja de base cuadrada sin tapa con capacidad de un litro, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.

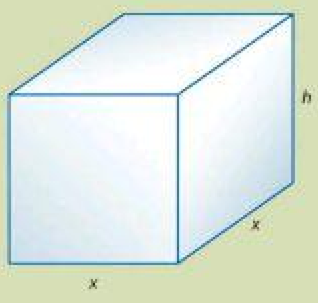
Solución

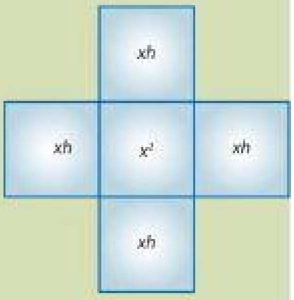
Determinemos el área que se va a utilizar y es la que deseamos que sea la mínima. Realiza el desarrollo de la caja, utilizando una hoja de papel.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= xh + xh + xh + xh + x^2 \\ &= 4xh + x^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Nota: Observa que el área es una función de dos variables.

Volumen de la caja: $V = x^2 h$





Por otro lado sabemos que:

$$V = 1 \text{ litro} = 1\,000 \text{ cm}^3$$

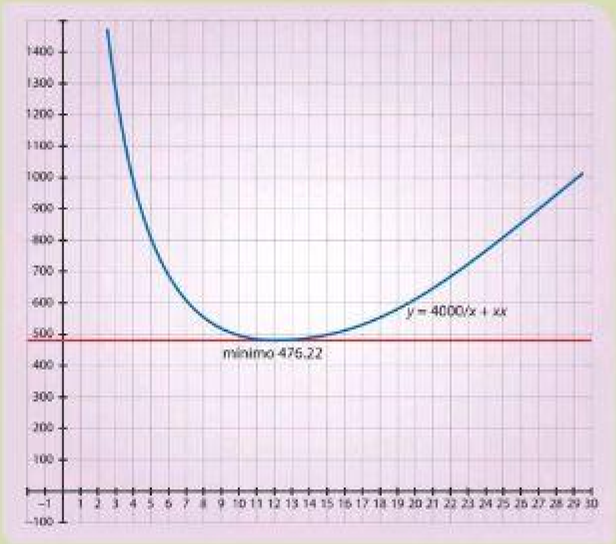
Por lo que podemos escribir:

$$1\,000 \text{ cm}^3 = x^2 h$$

De donde se despeja a h:

$$h = \underline{\qquad} \qquad (2)$$

Sustituimos (2) en (1) y tenemos:



Área =

Simplificamos Área =

Derivamos la función para obtener máximos y mínimos.

$$\text{Área} = 4\,000\,x^{-1} + x^2$$

$$\text{Área}' =$$

Simplificamos $= -\dfrac{4\,000}{x^2} + 2x$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$= 0$$

Multiplicamos por x^2 para resolver la ecuación con lo que obtenemos:

$$2x^3 - 4\,000 = 0$$
$$x^3 = 2\,000$$
$$x = 12.6$$

Utilizamos el criterio de la segunda derivada:

$$\text{Área}'' =$$

Como se puede ver el valor de x es positivo; al sustituirlo en la segunda derivada el resultado será positivo, por lo que se trata de un valor mínimo.

$$\text{Área}'' =$$

Sustituimos el valor de x en (2) con lo que se tiene:

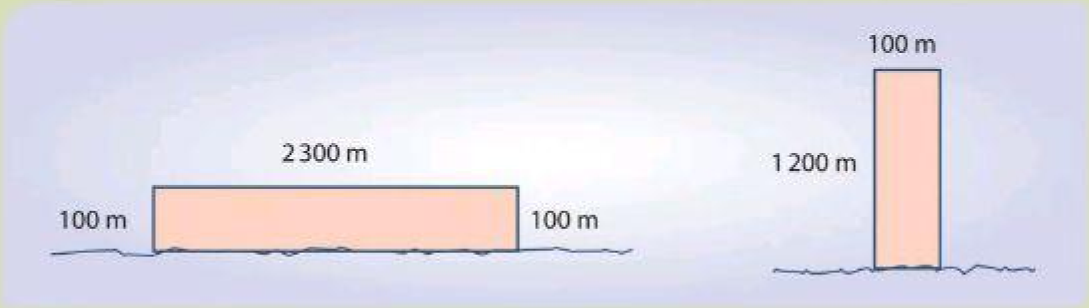
$$h =$$

Las dimensiones de la caja son: ____

III. Un campesino cuenta con 2 500 m de cerca y desea cercar un campo que bordea un río recto. En la ribera no necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?

Solución

Veamos dos situaciones extremas que se podrían presentar, una de ellas es que el ancho midiera 100 m y el largo 2 300 m; una segunda opción sería, el ancho 100 m y el largo 1 200 m. Observa las figuras siguientes.



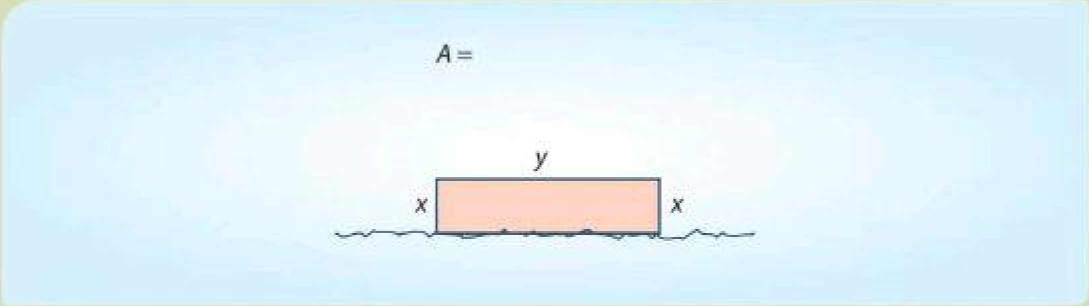
El área que cada uno cubriría es:

Área = $A =$

=   =

El área está dada por la relación:

$$A = \text{Largo por ancho}$$



Pensemos en general si x es el ancho y y es el largo el área $A =$ (1)

El perímetro lo escribimos así:

De donde podemos conocer el valor de y: $y = 2\,500 - 2x$

Al sustituir este valor en la ecuación (1) $A = x(2\,500 - 2x) = 2\,500x - 2x^2$

De esta ecuación determinamos los valores críticos: $A' = 2\,500 - 4x$

Igualamos a cero y resolvemos: $2\,500 - 4x = 0$

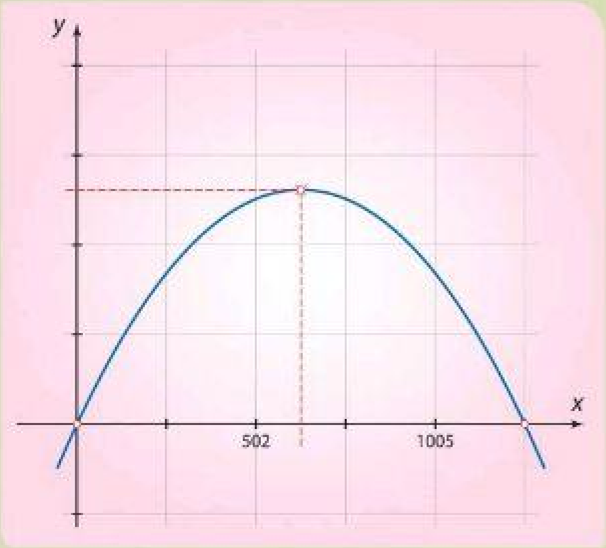
$$2\,500 - 4x = 0 \qquad 2\,500 = 4x \qquad x = 625$$

El valor obtenido de x representa el ancho = 625 m

El largo está dado por $y = 2\,500 - 2x = 2\,500 - 2(625) = 2\,500 - 1\,250 = 1\,250$ m

El área que se podrá cercar es 781 250 m^2.

La gráfica de la función es:



Trata de realizar la gráfica con un graficador o calculadora científica.

Ejercicio

1. Un campesino cuenta con 250 m de cerca y desea construir tres corrales, uno al lado del otro, utilizando el río para la toma de agua de los animales. En la ribera no necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?

IV. Determina Las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio $r = 5$ y altura $h = 15$.

Solución

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$, está dado por dos variables r y h, para conocer una de ellas podemos utilizar la semejanza de triángulos.

Utilicemos la siguiente comparación por medio de una proporción:

$(15 - h)$ es a 15 como r es 5

lo que expresamos como sigue:

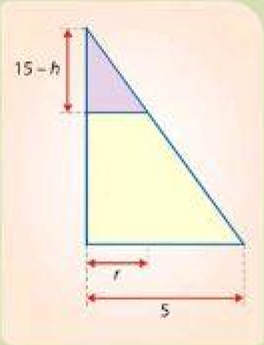
$$\frac{15 - h}{15} = \frac{r}{5}$$

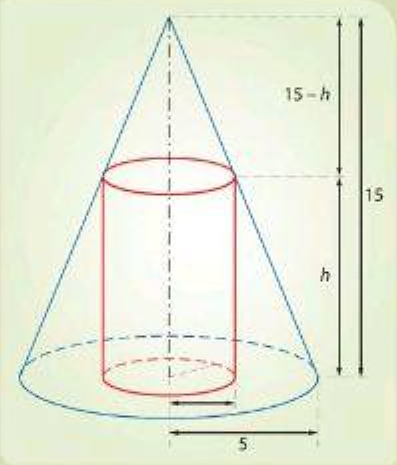
de donde se puede despejar h o r, despejamos h:

$$h = 15 - 3r$$

Sustituimos en la fórmula del volumen del cilindro:

$$\begin{aligned} v &= \pi r^2 h = \pi r^2 (15 - 3r) \\ &= 15\pi r^2 - 3\pi r^3 \end{aligned}$$





Derivamos la función del volumen: $V' = 30\pi r - 9\pi r^2$

La cual se iguala a cero y se resuelve para obtener los máximos y mínimos de la función.

$$V' = 3\pi r\,(10 - 3r) = 0$$

$$3\pi r = 0 \qquad\qquad 10 - 3r = 0$$

$$r = 0 \qquad\qquad 10 = 3r$$

$$r = \frac{10}{3}$$

Descartamos el valor de $r = 0$ por obvias condiciones ya que si el radio es cero no se tiene cilindro.

Obtenemos la segunda derivada: $V'' = 30\pi - 18\pi r$

Sustituimos el valor de $r = \dfrac{10}{3}$: $V'' = 30\pi - 18\pi\left(\dfrac{10}{3}\right) = -30\,\pi$

Por lo que el valor es un máximo.

La altura se obtiene de:

$$h = 15 - 3r$$

$$h = 15 - 3\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$h = 5$$

Ejercicios

1. Determina las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio $r = 25$ y altura $h = 45$.
2. Calcula las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio $r = 75$ y altura $h = 215$.

V. Una pieza larga y rectangular de lámina de 30 cm de ancho va a convertirse en canal para agua. Esto se hace doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. ¿Cuál debe ser el ancho de las partes dobladas para que el canal tenga capacidad máxima?

Solución

Sabemos que $a + 2b = 30$.

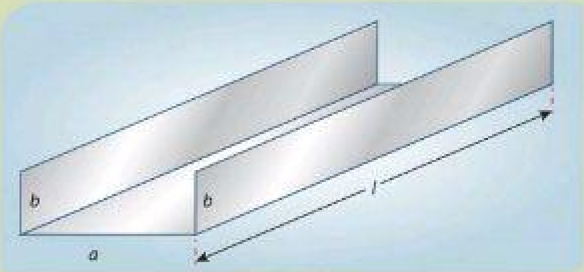
De donde obtenemos el valor de $a =$

El volumen está dado por $V = a^2 b$

Al sustituir el valor de a y realizando operaciones tenemos:

$$V = (30 - 2b)^2\, b = (900 - 120b + 46^2)\, b$$

$$= 4b^3 - 120b^2 + 900b$$



Obtenemos máximos y mínimos:

$V' = 12b^2 - 240b + 900$ $\quad f(b) = (30 - 2b)b$ $\quad f'(b) = 30 - 4b$ $\quad a = 30 - 2b$

$V'' = 24b - 240$ $\quad f(b) = 30b - 2b^2$ $\quad 4b = 30$ $\quad = 30 - 15$

$f'(b) = 30 - 4b$ $\quad b = \dfrac{30}{4} = 7.5$ cm $\quad = 15$ cm

$f'(b) = -4$

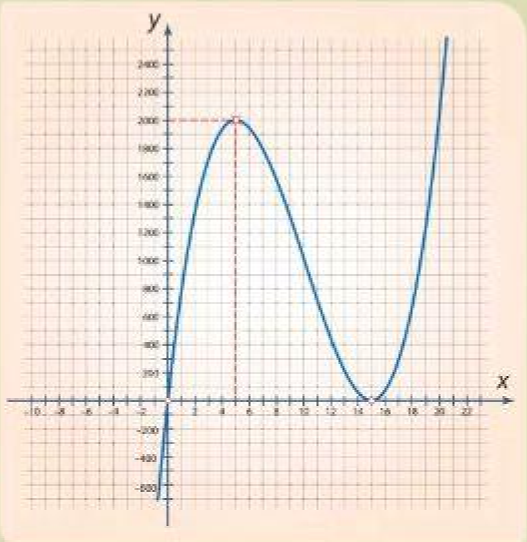
La primera derivada se iguala a cero y se resuelve para b (es una ecuación de segundo grado). Obtenemos $b = 5$ y $b = 15$.

Sustituimos en la segunda derivada para ver los máximos y mínimos.

$$V'' = 24(5) - 240 = -120$$
$$V'' = 24(15) - 240 = 120$$

El valor máximo es cuando el valor de $b = 5$ cm. El valor de $a = 30 - 2b = 30 - 2(5) = 20$ cm.

En la gráfica podemos observar cómo es la función.



Ejercicios

1. Una pieza larga y rectangular de lámina de 3 m de ancho va a convertirse en canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. ¿Cuál debe ser el ancho de las partes dobladas para que el canal tenga capacidad máxima?
2. Un alambre de 30 cm de largo se va a partir en dos pedazos. Uno de ellos se usará para construir un cuadrado y el otro pedazo para construir un círculo. ¿Dónde deberá cortarse el alambre para que la suma de sus áreas sea?:

   a) máximas $\qquad$ *b*) mínimas

VI. Se desea construir un tanque de acero para el almacenamiento de gas. La forma del tanque es un cilindro circular recto con semiesferas en los extremos. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 100π pies^3?

Solución

Los elementos

Recordemos algunas fórmulas que nos serán útiles en el problema:

Volumen: Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Cilindro $V = \pi r^2 h$

Área lateral: $A = 4\pi r^2$ $A = 2\pi r h$

Así el volumen total del contenedor de gas es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

La función del costo a optimizar es igual a dos veces el área de la esfera más el área del cilindro.

$$C = 2(4\pi r^2) + 2\pi r h$$

$4\pi r^2$ es el área de las dos semiesferas que forman una esfera y se multiplica por dos porque cuestan el doble.

Del volumen total podemos conocer el valor de h: $100\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

Dividimos la ecuación entre π y multiplicamos por 3: $300 = 4r^3 + 3r^2 h$

Despejemos a h $300 - 4r^3 = 3r^2 h$

$$h = \frac{300 - 4r^3}{3r^2}$$

Este valor lo sustituimos en la función de costos: $C = 2(4\pi r^2) + 2\pi r\left(\frac{300 - 4r^3}{3r^2}\right)$

Realizamos operaciones: $C = 8\pi r^2 + \frac{600\pi - 8\pi r^3}{3r}$

Realizamos la suma: $C = \frac{24\pi r^3 + 600\pi - 8\pi r^3}{3r} = \frac{16\pi r^3 + 600\pi}{3r}$

Esta función es en la que vamos a encontrar máximos y mínimos.

Obtenemos la primera derivada (es un cociente): $C' = \frac{48\pi r^2(3r) - (16\pi r^3 + 600\pi)3}{9r^2}$

Realizamos operaciones en el numerador: $C' = \frac{144\pi r^3 - 48\pi r^3 - 1\,800\pi}{9r^2}$

Reducimos términos semejantes e igualamos a cero: $C' = \frac{96\pi r^3 - 1\,800\pi}{9r^2} = 0$

Resolvemos la ecuación, multiplicamos por $9r^2$: $96\pi r^3 - 1\,800\pi = 0$

Despejamos a r: $r^3 = \frac{1\,800\pi}{96\pi} = 18.75$

$$r = \sqrt[3]{18.75} = 2.657 \text{ pies}$$

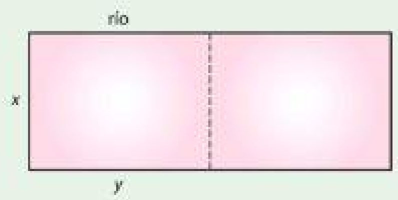
Como $h = \frac{300 - 4r^3}{3r^2}$, sustituimos el valor de r: $h = \frac{300 - 4(2.657)}{3(2.657)^2} = \frac{225}{21.18} = 10.62$ pies

Ejercicio

1. Se desea construir un tanque de acero para el almacenamiento de gas. La forma del tanque es un cilindro circular recto con semiesferas en los extremos. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 700 litros?

Ejercicios

1. Determina las dimensiones que debe tener una caja de base cuadrada sin tapa con capacidad de dos litros, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
2. Calcula las dimensiones que debe tener una caja donde el largo sea el doble que el ancho, sin tapa, con capacidad de dos litros, de tal modo que el área del material utilizado sea mínima.
3. Determina las dimensiones que debe tener una caja donde el largo sea el triple que el ancho, sin tapa, con capacidad de tres litros, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
4. Obtén las dimensiones que debe tener una caja de base cuadrada, con tapa, con capacidad de dos litros, de tal modo que el área del material utilizado sea mínima.
5. Determina las dimensiones que debe tener una caja, con tapa, de base cuadrada con capacidad de un litro, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
6. Calcula las dimensiones que debe tener una caja donde el largo sea el triple que el ancho, con tapa, con capacidad de tres litros, de tal modo que el área del material utilizado sea mínima.
7. Determina las dimensiones que debe tener un vaso para medir la leche de forma cilíndrica sin tapa, con capacidad de un litro, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
8. Obtén las dimensiones que debe tener una lata de aceite para automóvil de forma cilíndrica con tapa y capacidad de 20 litros, de tal forma que el área del material utilizado sea mínima.
9. Determina las dimensiones que debe tener una lata de refresco de forma cilíndrica con tapa, con capacidad de 375 cm^3, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
10. Calcula las dimensiones que debe tener un depósito para el almacenaje de agua de una comunidad con capacidad de 10 000 litros de forma cilíndrica con tapa, de tal modo que el área del material utilizado sea mínima.
11. Obtén las dimensiones que debe tener un envase con base de forma cilíndrica, sin base, sin tapa y con capacidad de un litro, de tal manera que el área del material utilizado sea mínima.
12. Determina las dimensiones que debe tener una cisterna de base cuadrada con tapa y capacidad de 20 m^3, de tal forma que el área del material utilizado sea mínima.
13. Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada disponiendo de 300 cm^2 de material de lámina de aluminio. Determina las dimensiones para que el volumen sea máximo.
14. En un edificio desean cercar el terreno que se encuentra en la parte trasera para protegerlo, se cuenta con 100 metros de cerca y desea encerrarlo en forma rectangular utilizando para ello la pared del edificio. Determina las dimensiones que permitan cercar la mayor área y de las dimensiones.
15. Un campesino cuenta con 250 m de cerca y desea construir dos corrales, uno al lado del otro, utilizando el río para la toma de agua de los animales. En la ribera no necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?



16. Halla dos números cuya suma sea 25, si deseamos que el cuadrado del primero por el segundo sea un máximo.

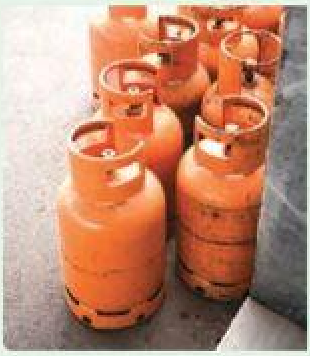
17. Determina las medidas que debe de tener un campo de área igual a 120 m^2, para que sea cercado por una valla de alambre de longitud mínima.

18. Se tiene una esfera de 1 metro de radio, determina la altura del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir dentro de ella.

19. Se va a construir un filtro para una cafetera. Si se tiene un radio de 15 cm, determina la altura que debe tener el cono para que ésta sea máxima.

20. Considera todos los triángulos isósceles de 10 cm de un perímetro y encuentra el área máxima que se pueda tener.

21. Se desea construir un tanque de gas para colocarlo en un camión, el cual realizará cargas en tanques estacionarios de casas particulares; la capacidad debe ser de 2 000 litros (2 m^3 y de forma cilíndrica con las puntas esféricas). Si se sabe que el costo de las partes esféricas es del doble que la del cilindro, ¿qué dimensiones minimizan el costo?



22. En un aserradero se desea cortar troncos cuyo diámetro es de 55 cm. Determina las dimensiones del máximo rectángulo que se puede trazar en la cara del tronco.

23. Las compañías de mensajería diseñan cajas de envío de base cuadrada y es necesario que la suma de su altura y el perímetro de su base no exceda a 275 cm. Determina la caja de mayor volumen que se puede construir.

24. Se desea construir un tanque cilíndrico con volumen de 400 litros para el almacenamiento de agua en las casas. ¿Qué dimensiones debe de tener el tanque para que la cantidad de material que se utilice sea mínima?

25. Se tiene un trozo de alambre de un metro de longitud el cual se va a cortar en dos partes, con una de ellas se formará un cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Qué longitud deberá tener cada una de ellas para que el área que se cubra sea mínima?

26. Se desea construir una lata de aluminio de forma cilíndrica con tapas y una capacidad de 500 mililitros. Determina las medidas que debe de tener para que éstas sean mínimas.

27. Halla un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

Lee el artículo que aparece en el siguiente link:

https://scientiablog.com/2011/05/19/la–guerra–del–calculo–matematico–newton–contra–leibniz/

Actividades a realizar

1. Lee el artículo y escribe las palabras que no entiendas, busca su significado.

2. Contesta las preguntas planteadas.

a) Según el artículo, ¿qué es el cálculo infitesimal?
b) Escribe la notación de Newton y la de Leibniz para la derivada.
c) ¿Cuáles son las aportaciones de Leibniz?
d) ¿Cuáles son las aportaciones de Newton?
e) ¿Quiénes eran conocidos como "enfants perdus"?
f) ¿Qué función desempeñan los "enfants perdus"?
g) ¿Qué alcances tiene la controversia entre Newton y Leibniz?

CIERRE

EVALUACIÓN SUMATIVA

I. Realiza lo que se te pide

1. En un día cualquiera toma las temperaturas de una ciudad cada 4 horas. Determina la velocidad en cada intervalo de cómo aumenta o disminuye ésta.
2. Encuentra la derivada de las siguientes funciones utilizando la definición:

$f(x) = 3x - 5,$ $\quad f(x) = 3x^2 - 5,$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f(x) = \sqrt{x-5}$

II. Determina la derivada de las siguientes funciones.

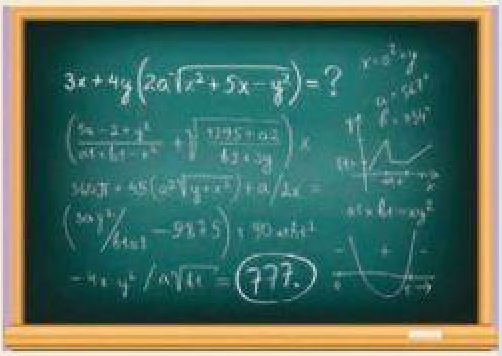
1. $y = -5x^9$
2. $f(x) = \dfrac{3\sqrt[5]{x^3}}{2}$
3. $f(x) = (x^2 + x)(6x + 1)$
4. $y = (5x^2 - 13)^{12}$
5. $y = 4\sqrt{x^4}$
6. $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$
7. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}x - 6\right)\left(\dfrac{3}{2}x + 7\right)^4$
8. $f(x) = \dfrac{(2x^2 - 3)^3}{x + 1}$

III. Deriva las siguientes funciones.

1. $y = (3x - 5)^2$
2. $y = \left(\dfrac{2}{3}x - 1\right)\left(\dfrac{3}{2}x + 1\right)$
3. $f(x) = (4x^2 + x)(x + 1)$
4. $y = (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)$
5. $f(x) = (5x^3 + 5x)^5$
6. $f(x) = \dfrac{x - 5}{(3x - 2)}$

IV. Deriva las siguientes funciones y evalúa en el punto $(2, y)$.

1. $y = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x^4} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$
2. $f(x) = \left(7x\sqrt{x^4} + 2\right)(2x + 4) + 2x^5 - 3$
3. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - x - 12}$



V. Resuelve los siguientes problemas.

1. Realiza la gráfica de $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Traza la recta tangente y la normal en el punto de coordenadas $(2, y)$.
2. Determina los intervalos donde es creciente, decreciente, máximos y mínimos, punto de inflexión, concavidades y la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.
3. Obtén los intervalos donde es creciente, decreciente, máximos y mínimos, punto de inflexión, concavidades y la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.
4. Se desea construir un tanque de acero para el almacenamiento de gas. La forma del tanque es un cilindro circular recto con semiesferas en los extremos. El costo por pie cuadrado de los extremos es el triple de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de $500\,\pi$ pies^3?
5. Se desea construir un tanque cilíndrico vertical sin tapa con una capacidad de 100 metros cúbicos. Halla las dimensiones que debe tener para que sus dimensiones sean mínimas.
6. Un alambre de 50 cm de largo se va a partir en dos pedazos, uno de ellos se usará para construir un cuadrado y el otro pedazo para construir un círculo ¿Dónde deberá cortarse el alambre para que la suma de sus áreas sea:
   a) máximas
   b) mínimas

1. AUTOEVALUACIÓN

Aspecto a evaluar	Excelente	Bueno	Regular	Satisfactorio
Realicé los ejercicios correctamente	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Trabajé en equipo	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Actividad integradora (ver puntaje)	Valor: 10 puntos	Valor: 7 puntos	Valor: 4 puntos	Valor: 2 puntos
Lectura	Contesté correctamente más de 90% de las preguntas. Valor: 5 puntos	Contesté correctamente entre 80 y 89% de las preguntas. Valor: 4 puntos	Contesté correctamente entre 70 y 79% de las preguntas. Valor: 3 puntos	Contesté correctamente menos de 70% de las preguntas. Valor: 2 puntos
Trabajo extraclase	Realicé todas mis tareas. Valor: 5 puntos	Realicé 80% de mis tareas. Valor: 4 puntos	Realicé 60% de mis tareas. Valor: 3 puntos	Realicé 50% de mis tareas. Valor: 2 puntos
Suma de puntos por columna				
Total de las columnas	De 45 a 50 puntos	De 40 a 44 puntos	De 35 a 39 puntos	Menos de 35 puntos

2. AUTOEVALUACIÓN DISCIPLINAR

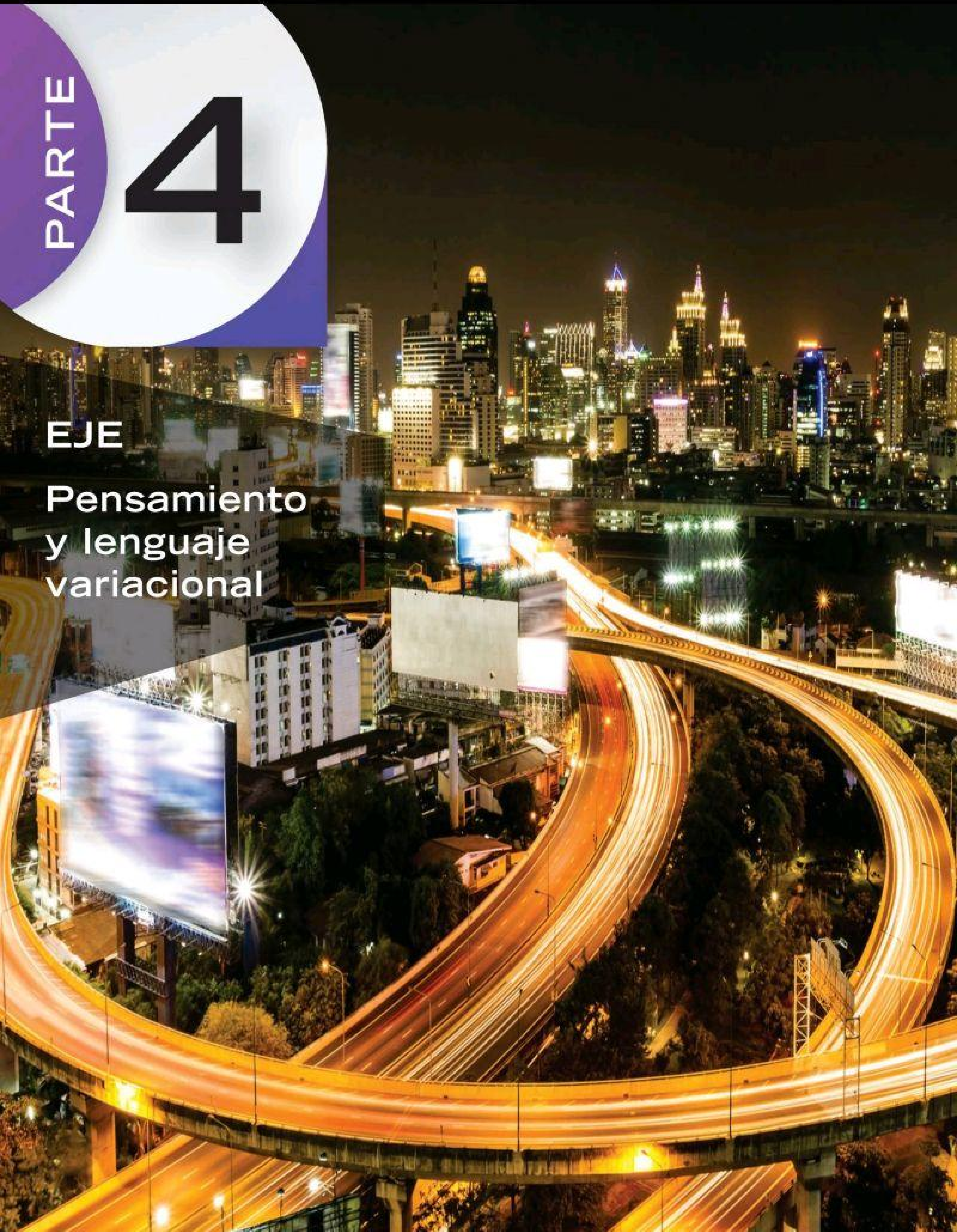
Revisa la actividad y contesta el dominio que tienes de los siguientes conceptos.

Concepto	Lo domino	No lo domino
Graficación de funciones por diversos métodos.		
Introducción a las funciones continuas.		
La derivada como una función.		
Criterios de optimización.		
Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.		

PARTE 4

EJE

Pensamiento y lenguaje variacional



CUARTA **PARTE**

A continuación se presentan los elementos que definen el trabajo que vamos a realizar en este Eje.

Componentes

- Cambio y predicción: elementos del Cálculo

Contenido central

- **Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada).** Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

Contenidos específicos

4.1 Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares

4.2 Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar? ¿Qué métodos conocemos?

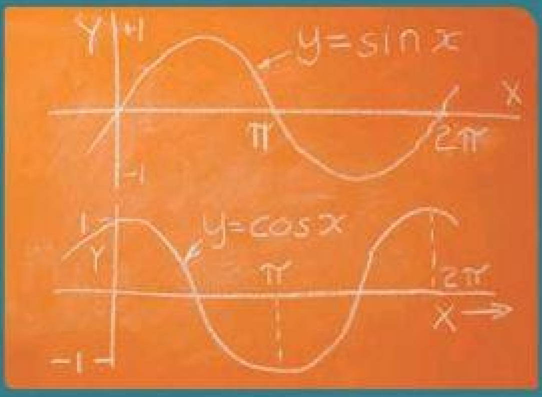
4.3 Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras)

Aprendizajes esperados

- Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de un función (los ceros de f, f' y f''). En algunos casos, se podrán estudiar los cambios de f'' mediante la tercera derivada

Productos esperados

- Localizar los ceros de f y sus derivadas hasta el orden tres.



APERTURA

Evaluación diagnóstica

1. ¿Cuál es el resultado si sumamos dos funciones continuas? ( )

   a) Cero | *b*) Una función continua
   c) Una función de segundo grado | *d*) Una función discontinua
   e) La función constante

2. Si se suman dos funciones lineales, ¿qué grado tiene la nueva función? ( )

   a) Tercero | *b*) Segundo | *c*) No tiene grado
   d) Cuarto grado | *e*) Primer grado

3. Si se suman dos funciones, una de segundo grado y otra de primer grado, ¿qué grado tiene la nueva función? ( )

   a) Tercero | *b*) Segundo | *c*) No tiene grado
   d) Cuarto grado | *e*) Primer grado

4. Si se suman dos funciones de segundo grado, ¿qué grado tiene la nueva función? ( )

a) Tercero *b*) Segundo *c*) No tiene grado
d) Cuarto grado *e*) Primer grado

5. Si la función cambia de creciente a decreciente, entonces el punto de cambio es: ( )

a) Tercero *b*) Un mínimo *c*) Un máximo
d) Cuarto grado *e*) Primer grado

6. Si la función derivada es mayor que cero, la función es: ( )

a) Decreciente *b*) Un mínimo *c*) Un máximo
d) Creciente *e*) Cóncava

7. Cuando obtenemos los máximos y mínimos de una función, ¿por qué se iguala la primera derivada a cero? ( )

a) Para resolver la ecuación
b) Para determinar el valor de la pendiente
c) Porque la pendiente de la recta tangente a la curva es cero
d) Por ser el punto más alto
e) Por ser el punto más bajo

8. Si en una función tienes un punto máximo, ¿qué representa en su derivada? ( )

a) Un cero de la función *b*) Un mínimo *c*) Un máximo
d) Un punto de inflexió *e*) Una concavidad

9. Si la función es lineal, ¿cuántos máximos tiene la función? ( )

a) Cero *b*) Uno *c*) Dos
d) Cuatro *e*) Más

10. Si la función es cuadrática, ¿cuántos máximos tiene la función? ( )

a) Cero *b*) Uno *c*) Dos
d) Cuatro *e*) Más

11. Si la función es $f(x) = -x^3$, ¿cuántos máximos tiene a lo más? ( )

a) Cero *b*) Uno *c*) Dos
d) Cuatro *e*) Más

Tema integrador

Situación didáctica

Deduce y aprende

Velocidad y aceleración

Propósito: Determinará la velocidad de él y sus compañeros de equipo por aproximaciones.

Requisitos teóricos: Gráficas

¿Qué fórmulas utilizas para la velocidad promedio?

Equipo y material:

- Material impreso
- Colores
- Cronómetro
- Cinta métrica
- Gis

Secuencia didáctica

Determina la velocidad instantánea de los alumnos del equipo, al recorrer cierta distancia.

1. Los alumnos formarán equipos de siete alumnos y se nombrarán con las letras A, B, C, D, E, F y G.
2. Determinen una distancia de 30 metros, donde colocarán la salida y la meta.
3. El alumno A, cronómetro en mano, se colocará a 10 metros de la salida, para tomar el tiempo, cuando el corredor pase por ese punto.
4. El alumno B, cronómetro en mano, se colocará a 15 metros de la salida, para tomar el tiempo, cuando el corredor pase por ese punto.
5. El alumno C, cronómetro en mano, se colocará a 20 metros de la salida, para tomar el tiempo, cuando el corredor pase por ese punto.
6. El alumno D, cronómetro en mano, se colocará a 25 metros de la salida, para tomar el tiempo, cuando el corredor pase por ese punto.
7. El alumno E, cronómetro en mano, se colocará a 30 metros de la salida, para tomar el tiempo, cuando el corredor pase por ese punto.
8. El alumno F dará la salida y en ese momento todos los alumnos encenderán su cronómetro.
9. El alumno G es el que corre (con muchas ganas).

Se repite lo anterior para que a cada uno de los alumnos se le tomen sus tiempos. A continuación se presentan tablas para un mejor control.

Distancia	10	15	20	25	30	metros
Tiempo de A						Segundos
Tiempo de B						Segundos
Tiempo de C						Segundos

Distancia	10	15	20	25	30	metros
Tiempo de D						Segundos
Tiempo de E						Segundos
Tiempo de F						Segundos
Tiempo de G						Segundos

Cierre de la actividad

10. Realiza la gráfica de tus datos en tu cuaderno, compárala con la de tus compañeros.

11. Determinen la velocidad promedio de cada uno de los alumnos en los intervalos que se indican y anótenlos en la tabla siguiente.

	Alumno A			Alumno B		
Distancia recorrida	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno A	Aceleración del alumno A	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno B	Aceleración del alumno B
$\Delta d = d_2 - d_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$			$\Delta t = t_2 - t_1$		
$10 < d < 30$						
$10 < d < 25$						
$10 < d < 20$						
$10 < d < 15$						
$d = 10$						

	Alumno C			Alumno D		
Distancia recorrida	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno C	Aceleración del alumno C	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno D	Aceleración del alumno D
$\Delta d = d_2 - d_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$			$\Delta t = t_2 - t_1$		
$10 < d < 30$						

Distancia recorrida	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno C	Aceleración del alumno C	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno D	Aceleración del alumno D
$10 < d < 25$						
$10 < d < 20$						
$10 < d < 15$						
$d = 10$						

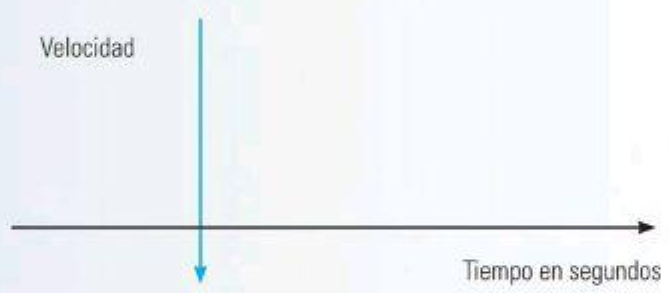
		Alumno E			**Alumno F**	
Distancia recorrida	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno E	Aceleración del alumno E	Intervalo de tiempo	Velocidad del alumno F	Aceleración del alumno F
$\Delta d = d_2 - d_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$			$\Delta t = t_2 - t_1$		
$10 < d < 30$						
$10 < d < 25$						
$10 < d < 20$						
$10 < d < 15$						
$d = 10$						

		Alumno G	
Distancia recorrida	Intervalo de tiempo	Velocidad	Aceleración del alumno G
$\Delta d = d_2 - d_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$		
$10 < d < 30$			
$10 < d < 25$			
$10 < d < 20$			
$10 < d < 15$			
$d = 10$			

12. Determinen la aceleración de cada uno de los alumnos en los intervalos que se dan. Concentra tu información en la ecuación siguiente.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{cambio de velocidad}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

13. Traza la gráfica de tus datos en tu cuaderno, compárala con la de tus compañeros.



A la variación de la distancia con respecto al tiempo se le llama velocidad y se obtiene con la primera derivada de la función; a la variación de la velocidad con respecto al tiempo se le llama aceleración y se obtiene con la segunda derivada. El proceso inverso conocida la velocidad y el tiempo nos permite calcular la distancia: conocida la aceleración y el tiempo calculamos la velocidad; este proceso es objeto del cálculo integral.

Rúbrica para evaluar la secuencia didáctica del tema integrador

Proyecto integrador: Velocidad y aceleración

Secuencia didáctica

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Formen equipos de siete alumnos.	• Formen su portafolio de evidencias.	• Escriban en el cuaderno el análisis que hicieron sobre la situación didáctica.
• Lean la secuencia didáctica que se plantea.	• Analicen la información obtenida de la toma de datos. • Diseñen los instrumentos para agrupar la información que se requiere. • Entre todos calculen la velocidad y la aceleración de cada uno. • Discutan la importancia del cociente que se forma. • Discutan las condiciones del experimento respecto de cómo se puede ver afectadas la toma de datos.	• Realiza un mapa mental. • Haz una tabla con los datos obtenidos. • Realiza la gráfica de cada uno.
• Analicen la actividad que se plantea.	• Analicen la importancia de realizar este tipo de proyectos, anoten sus conclusiones. • Determinen los instrumentos de presentación gráfica. • Recuerden incluirlo en la presentación de la información.	• Realiza una presentación del proyecto, donde se incluyan las evidencias formuladas al utilizar fotografías, video, etcétera. • Anoten sus conclusiones.

Actividad: Documento

Instrumento: Rúbrica

Aspecto a evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Análisis de la situación didáctica.	Realiza una investigación completa de la situación.	Realiza una investigación clara y convincente.	La investigación no es clara y sólo se presentan recortes de páginas web.	La investigación es deficiente y no aporta conocimientos claros.
Desarrollo del proyecto integrador.	Tiene orden en los contenidos. Los argumentos que presenta están bien fundamentados y sus conclusiones son correctas.	Tiene orden en los contenidos. Los argumentos que presenta están bien fundamentados pero sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta están bien fundamentados pero sus conclusiones no son correctas.	No hay orden en los contenidos, los argumentos que presenta no están bien fundamentados y sus conclusiones no son correctas.
Presentación de resultados	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de tablas y gráficas, sus conclusiones son claras. Presenta los datos de los siete alumnos.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de tablas y gráficas. Sus conclusiones son escasas. Presenta por lo menos los datos de cinco alumnos.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas pero no tiene conclusiones. Presenta por lo menos datos de tres alumnos.	Realiza una presentación por escrito de la información por medio de gráficas pero sus conclusiones no son claras. Presenta por los menos datos de dos alumnos.

Actividad: Exposición

Instrumento: Rúbrica

Valor: 40

Criterios	Estándares		
Presentación	Destaca su organización y comprensión del trabajo. La exposición es clara. El grupo siempre se interesó por el tema. Valor: 15 puntos.	Fue adecuada y con cierta organización. El grupo pudo entender la mayor parte de lo que se dijo. Valor: 8 puntos.	Presentación mal preparada. Información desorganizada e incompleta. El grupo no prestó atención a la exposición. Valor: 4 puntos.
Cualidades de la expresión oral	Correcta dicción, volumen adecuado; estableció contacto visual con el grupo; empleó correctamente el lenguaje kinésico; proyectó confianza. No incurrió en el uso de muletillas. Valor: 15 puntos.	Demostró poca confianza ya que evitaba el contacto visual con el grupo. Empleó correctamente el lenguaje kinésico. Ocasionalmente se observó el uso de muletillas. El volumen fue adecuado. Valor: 8 puntos.	Demostró inseguridad, y empleó muletillas; su volumen de voz fue bajo y no se observó control del lenguaje kinésico. Valor: 4 puntos.

Criterios	Estándares		
Tiempo	Duró el tiempo asignado. Valor: 5 puntos.	Duró, aproximadamente, el tiempo asignado. Valor: 3 puntos.	La presentación fue muy breve o muy extensa. Valor: 1 punto.
Material de apoyo	Presenta lenguaje icónico, que refuerza lo expresado verbalmente. El material contiene palabras acordes al nivel del receptor y ortografía. Coloca solamente los datos relevantes. Valor: 5 puntos.	Presenta lenguaje icónico, pero el material está recargado de información. Presenta errores ortográficos. Contiene palabras acordes al nivel del receptor. Valor: 3 puntos.	Presenta material con ausencia de lenguaje icónico. Errores ortográficos y descuida el nivel del receptor. Valor: 1 punto.

Propósito

Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que solucionen problemas surgidos de la actividad humana, tales como la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

¿Qué aprenderás?

- Determinar la razón de cambio de distintas situaciones.
- Aplicar los límites de una función a casos prácticos.
- A derivar una función.
- Relacionar la derivada de una función con la pendiente.
- Aplicar la derivada a diferentes situaciones.

¿Para qué te servirá?

El cálculo diferencial es una de las herramientas más importantes en el mundo profesional por el sinnúmero de aplicaciones que se tienen en tu vida profesional.

El cálculo diferencial lo aplicarás en todas las cosas que sufren cambios de posición.

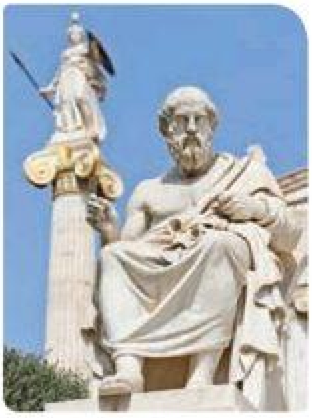
Podrás calcular los máximos y mínimos de funciones para la optimización de diversas situaciones.

No basta con tener buen ingenio;
lo principal es aplicarlo bien.

Descartes

DESARROLLO

4.1 Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares



Veamos detenidamente lo que sucede a nuestro alrededor. Lo que primero observamos es que los objetos se encuentran en reposo o en movimiento. Posteriormente, una observación más detallada nos permite notar que tanto los objetos en reposo como los objetos en movimiento, se encuentran todo el tiempo dispuestos al cambio en sus propiedades, por ejemplo, los objetos cambian de forma a causa de la fricción, o bien, cambian de tamaño, dilatándose o contrayéndose, debido a los cambios de temperatura en el medio ambiente; en consecuencia todo objeto en el mundo es propenso al cambio de posición, forma, tamaño, temperatura, color, composición, etcétera.

Como podemos ver los procesos de cambio están íntimamente relacionados con la naturaleza, luego para comprender a la naturaleza, debemos entender los procesos de cambio, pero éstos, por ser "continuos" no ofrecen ningún punto de partida sencillo, en el cual nuestra mente pueda ubicar y controlar. Este hecho originó durante siglos un gran desconcierto entre los matemáticos.

Los griegos dieron los primeros pasos en las matemáticas del cambio, al imaginarse las líneas como trazos realizados por puntos en movimiento, y cuando analizaron las líneas detalle a detalle, por medio de la técnica de dividirlas en segmentos "infinitamente pequeños". Otro paso lo dio el francés René Descartes cuando pensó en la concepción de una ecuación como función de variables y constantes, pero sobre todo cuando desarrolló la forma de representar gráficamente a dichas funciones.

Más tarde, alrededor de 1665, el inglés Isaac Newton ideó una prodigiosa creación mental llamada en la actualidad "cálculo infinitesimal", que por primera vez permitió el análisis matemático de todo proceso de cambio, lo hizo a través del estudio de las razones de cambio, fundamentalmente de tipo cinemático. Para su creación Newton se apoyó en la técnica de división de líneas en segmentos pequeños de los griegos y en el sistema gráfico de Descartes. Su creación probó su efectividad tan rápidamente que la utilizó para establecer las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal.

Por otra parte, en forma independiente a los estudios de Newton, entre 1673–1676 el alemán Gottfried Wilhem Leibniz, basado en los análisis de Huygens, Descartes y Pascal, desarrolló también el "cálculo infinitesimal" bajo un tratamiento distinto al de Newton, a través de una concepción de tipo geométrico. Leibniz publicó su creación al público en 1684, mientras que Newton lo hizo en 1704.

La notación que usamos para el cálculo infinitesimal se debe a Leibniz. A él también le debemos los nombres de "cálculo diferencial" y "cálculo integral", así mismo, le debemos los términos de "función" y de "coordenadas".

Razón de cambio promedio de interpretación geométrica

Existe gran variedad de procesos de cambio. Si los componentes que comprende cualquier situación de cambio "continuo" logran ponerse en términos de una ecuación, entonces el cálculo puede abarcarlos y descubrir las leyes a que obedecen. El cambio en estudio puede ser tan lento como el crecimiento de los árboles, tan drástico como el cambio de clima, tan visible como la inflación, tan silencioso como los muertos por contaminación.

El cálculo analiza todas las situaciones al introducir dos nuevas operaciones matemáticas a las ya existentes, como la adición, multiplicación, división, potenciación y radicalización. Estas nuevas operaciones son diferenciación e integración. La primera es una forma de calcular la razón de cambio de una variable en relación con otra en cualquier paso de un proceso. Por su parte, la integración, al revés de la diferenciación, considera a una ecuación en términos de la razón de cambio y la convierte en una ecuación en términos de las variables que hacen el cambio.

Si continuamos observando con detalle a la naturaleza, vemos que la gravedad actúa en forma tal que hace que un objeto que cae se mueva en una razón que aumenta en una proporción constante a dicha razón, a la cual Newton la denominó aceleración de la gravedad.

El cálculo analiza en qué proporciones ocurren los cambios. Para entender esto recordemos que la velocidad está definida como la razón de cambio del espacio del recorrido por un móvil en el intervalo de tiempo necesario para recorrer dicho espacio, y que la aceleración se define como la razón de cambio de una relación de velocidad entre el intervalo de tiempo necesario para llevar a cabo dicha variación de velocidades. Así, el cálculo nos permite estudiar también la razón a la que cambia la razón de cambio.

Un incremento de la variable x lo representaremos Δx (delta x) y puede ser positivo (incremento) o negativo (decremento) según la variable aumente o disminuya al cambiar de valor.

Ejemplo

Con un cañón se dispara un proyectil cuya trayectoria se describe con la ecuación $y = -0.03t^2 + 0.78t + 0.07$, donde y representa la distancia en metros y t el tiempo medido en segundos. Calcula la razón promedio de cambio de distancia con respecto al tiempo.

a) De 3 a 4 segundos.
b) De 12 a 13 segundos.
c) De 22 a 23 segundos.

Tiempo (s)	Distancia en m
3	2.14
4	2.71
12	5.11
13	5.14
22	2.71
23	2.14

Solución

La velocidad de un objeto en movimiento en un intervalo de tiempo se define como el cociente de la distancia recorrida dividida en el tiempo transcurrido.

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(4) - y(3)}{4 - 3} = \frac{2.71 - 2.14}{1} = 0.57 \text{ incremento}$$

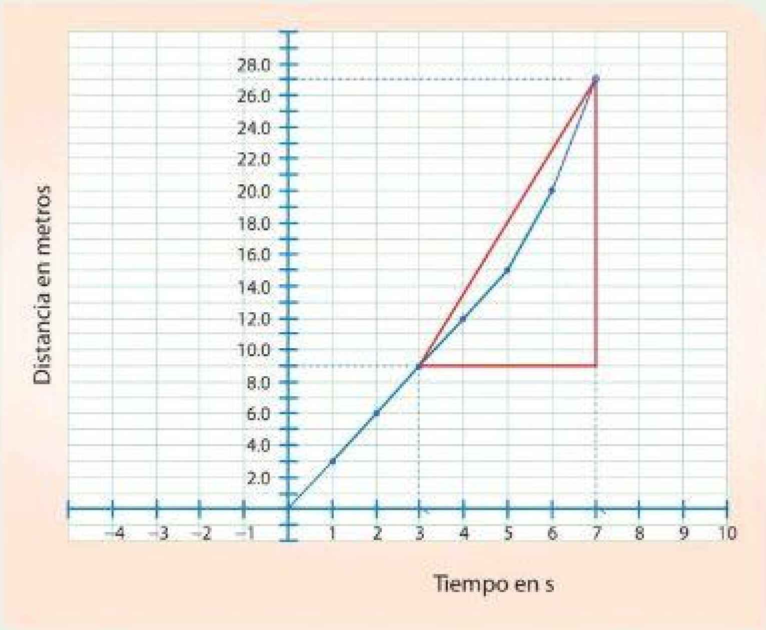
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(13) - y(12)}{13 - 12} = \frac{5.14 - 5.11}{1} = 0.03 \text{ incremento}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(23) - y(22)}{23 - 22} = \frac{2.14 - 2.71}{1} = -0.57 \text{ decremento}$$

Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Con los datos del desplazamiento de un automóvil en función del tiempo se tiene la siguiente gráfica:

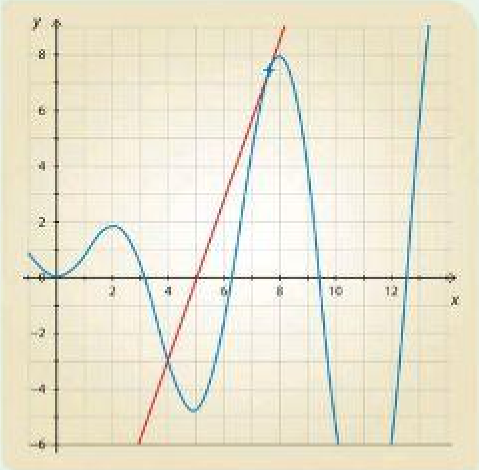


Calcula el valor de la velocidad media del automóvil durante el intervalo de tiempo $t_1 = 3$ y $t_2 = 7$. Marca en la gráfica: Δt, y Δy. La expresión es:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Es una razón de cambio que en geometría analítica se conoce como pendiente. Determina el valor de la pendiente del segmento de recta que une los puntos (3, 9) y (7, 27).

2. Con los datos de un cierto automóvil se realizó la gráfica siguiente. Se desea calcular la velocidad instantánea a los 7.6 segundos.



Para calcular la velocidad instantánea en cualquier momento, se traza la tangente en el punto y se determina la pendiente de esa recta. Considera dos puntos de la recta tangente los más próximos uno del otro de tal manera que la distancia entre ellos sea la más pequeña.

3. En las siguientes tablas faltan algunos valores de un móvil, encuentra su relación (fórmula) de tal manera que haya proporcionalidad entre el primero y el segundo renglón. Con ella completa la tabla y determina la velocidad con la que se desplaza el móvil.

$$v = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Relación ______________________

t	3	5	11	18	21	26
y	15		55		105	
v						

Relación ______________________

t	4	5	12	18	32	35
y	3		9		24	
v						

4. Un móvil se desplaza según la tabla siguiente:

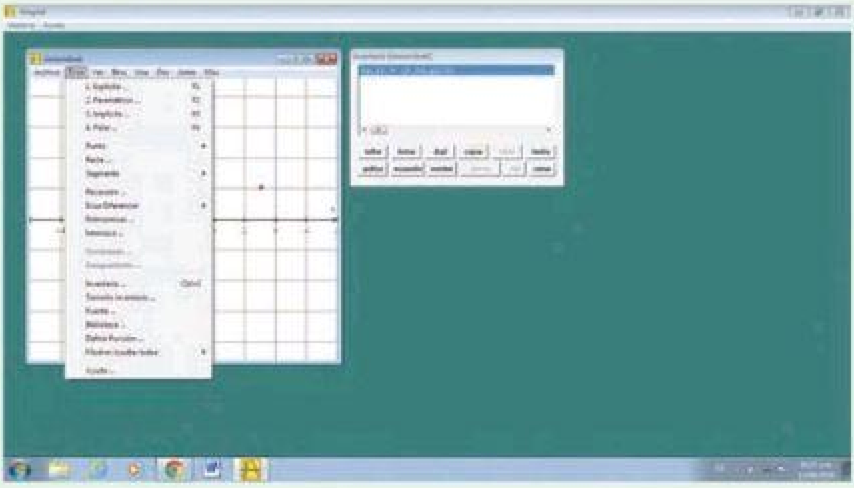
Punto	t	y
A	0	10
B	2	30
C	5	30
D	7	20
E	8	10

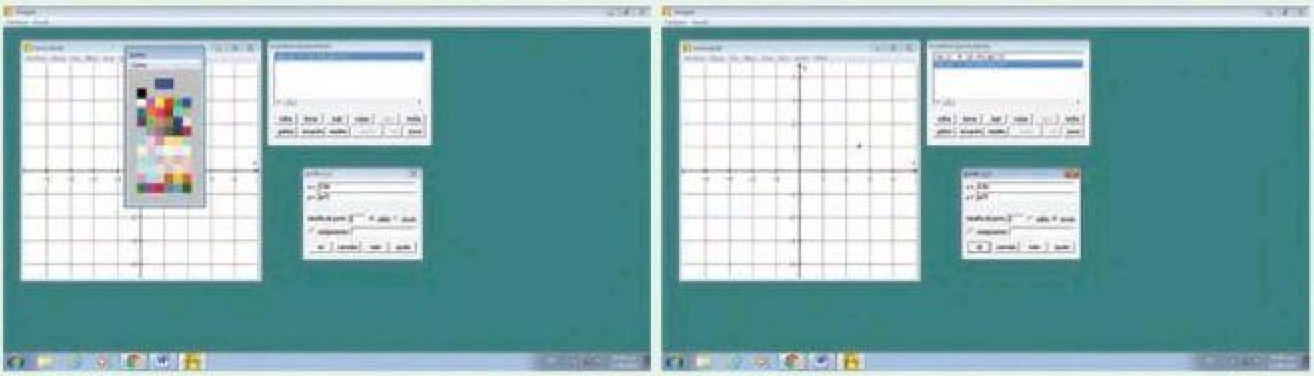
Utiliza Winplot o un graficador para la traza de los puntos y únelos por segmento de recta. Del menú de Winplot selecciona ecua, punto, o los extremos del segmento según tu actividad. Los menús son muy sencillos, sólo tienes que brindar las coordenadas del punto o los extremos del segmento; puedes seleccionar color, el trazo sólido o círculo, con las componentes, etcétera.

De la gráfica determina:

- La velocidad promedio de *AB*, *BC*, *CD* y *DE*.

En las siguientes pantallas se muestran los menús que aparecen en las instrucciones anteriores.





5. Un móvil tiene los siguientes movimientos:

   a) Se desplaza de 0 a 3 segundos con una velocidad de 1 m/s.
   b) Se desplaza de 3 a 5 segundos con una velocidad de 8 m/s.
   c) Se desplaza de 5 a 7 segundos con una velocidad de 0 m/s (reposo).
   d) Se desplaza de 7 a 10 segundos con una velocidad de –8 m/s.

   Traza la gráfica del desplazamiento.

6. Los datos indicados en la siguiente tabla corresponden al desplazamiento de un móvil. En la tabla faltan algunos valores.

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad instantánea
0	0	0
1		2
2	4	
3		6
4	16	
5		10
6	36	
x		

   a) Determina los valores que faltan para las columnas de desplazamiento y velocidad. Establece un modelo para el desplazamiento y la velocidad. Traza la gráfica de cada uno.
   b) Determina la velocidad instantánea en $t = 2.5$ s.
   c) Precisa la pendiente de la gráfica de la velocidad instantánea.

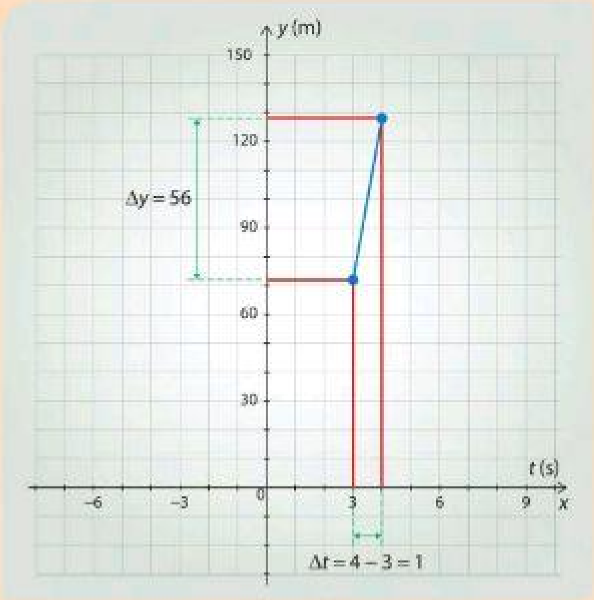
Ejemplo

En el siguiente ejemplo se relacionan los incrementos con la pendiente de una recta dados dos puntos.

Grafica cada uno de los pares de puntos calculados y determina la pendiente de éstos.

a) Para P_1 (3, 72) y P_2 (4, 128).

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{56}{1} = 56 \text{ m/s}$$



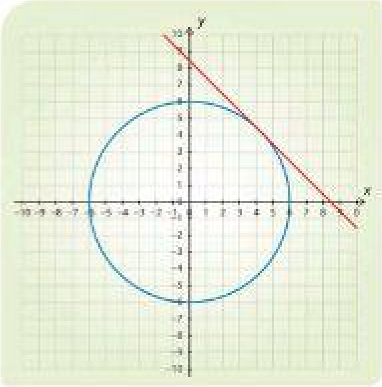
Ejercicios

1. Determina la pendiente de la recta que une los puntos P y S.
   a) $P(3, 72)$ y $S(3.5, 98)$
   b) $P(3, 72)$ y $S(3.1, 76.88)$
   c) $P(3, 72)$ y $S(3.01, 72.4808)$
   d) $P(3, 72)$ y $S(3.001, 72.048)$

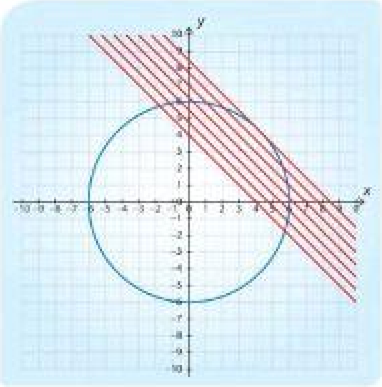
2. Calcula la razón de cambio promedio de cada una de las siguientes funciones entre los puntos dados.
   a) $f(t) = 2t + 7$; $(1, 9)$ y $(2, 11)$
   b) $f(t) = 16t^2 + 10$; $t = 0$ y $t = 2$
   c) $f(x) = 3x - 1$; $(0, -1)$ y $(1/3, 0)$
   d) $f(t) = 3t^3 + t$; $t = 1.9$ y $t = 2$
   e) $h(s) = s^2 - 6s - 1$; $(-1, 6)$ y $(3, -10)$
   f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$; $x = 1.99$ y $x = 2$
   g) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $(1, 0)$ y $(3, \sqrt{8})$
   h) $f(x) = 20 - 4.9t^2$; $(3, y)$ y $(5, y)$

Tangente a una curva

La primera definición de tangente es para la circunferencia. Se define como la recta que toca un punto de la circunferencia, otra que podríamos citar es la posición límite de la secante cuando la distancia entre los dos puntos tiende a ser cero.



Tangente



Secantes

Aplicaciones de la derivada

Ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta tangente y la normal (recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia) a la curva $y = 4x^2 + 3x - 2$ en el punto $p\,(0, -2)$.

Solución

Para obtener la pendiente de la recta tangente a la curva derivamos la función:

$$y' = 8x + 3 = m(x)$$

Evaluamos la derivada en $x = 0$:

$$y' = 8(0) + 3 = 3 = m$$

Con la pendiente $m = 3$ y el punto $p\,(0, -2)$ sustituimos en la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$: forma punto pendiente.

$$y - (-2) = 3(x - (0))$$

Al realizar operaciones, obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$y = 3x - 2$$

Para obtener la ecuación de la recta normal.

Por ser perpendicular a la recta tangente tenemos que: $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$

Al sustituir: $m_2 = \dfrac{-1}{3}$ y el punto de tangencia: $p\,(0, -2)$, sustituimos en la ecuación de la recta.

$$y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

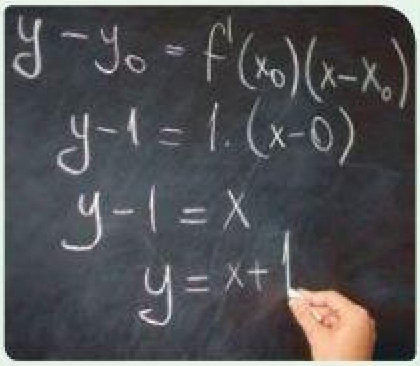
Ésta es la ecuación de la recta normal: $y = -\dfrac{1}{3}x - 2$

Traza la gráfica, para verificar el resultado.

Ejercicios

I. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3$ en el punto $P(2, 1)$.

II. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva y la normal en el punto que se indica y traza la gráfica de estos elementos.



1. $y = x^2 + 3x - 5$ $\quad p\,(0, -5)$
2. $y = x^2 + 4x - 2$ $\quad p\,(2, 10)$
3. $y = 2x^2 - 3x + 6$ $\quad p\,(1, y)$
4. $y = 3x^2 - 6x + 7$ $\quad p\,(-1, y)$
5. $y = -6x^2 + 3x - 3$ $\quad p\,(-2, y)$
6. $y = -5x^2 + 2x - 5$ $\quad p\,(1, y)$
7. $y = 2x^3 - 4x + 8$ $\quad p\,(-1, y)$
8. $y = 3x^3 - 6x + 8$ $\quad p\,(2, y)$
9. $y = 4x^3 + 3x^2 - 9x$ $\quad p\,(0, y)$
10. $y = 6x^3 - 7x^2 - 5x$ $\quad p\,(1, y)$

La velocidad

Ejemplo

El movimiento de una partícula está dado por la ecuación $f(t) = 23t^2 + 8t + 9$, la cual es una función del tiempo medido en segundos. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de la partícula en el tiempo $t = 5$?

Solución

Tenemos que la partícula se mueve según la ecuación del movimiento $f(t) = 23t^2 + 8t + 9$.

Para ello calculemos la primera derivada (velocidad), y la segunda derivada (aceleración), $f'(t) = 46t + 8$; como se desea conocer la velocidad en $t = 5$, calculamos

$$f'(5) = 46(5) + 8 = 238 \text{ m/s}$$

y la aceleración es $$f''(5) = 46 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio

Resuelve el siguiente problema. El movimiento de una partícula está dado por la ecuación $f(t) = 3t^2 + 5t + 4$, la cual es una función del tiempo medido en segundos, ¿cuál es la velocidad y la aceleración de la partícula en el tiempo $t = 3$?

Ejemplo

Se desea inflar un globo de forma esférica, para lo cual se bombea aire hacia su interior de tal manera que su volumen aumenta a razón de 75 cm³/s. Determina la rapidez con la que crece el radio del globo cuando su radio es de 17 cm.

Solución

Del problema vemos que existe una razón de cambio del volumen, la que expresamos $\frac{dv}{dt} = 75$ cm³/s, o sea el incremento del volumen del globo con respecto al tiempo que transcurre.

Sabemos también que el radio del globo sufre un incremento conforme pasa el tiempo, lo que expresamos como $\frac{dr}{dt} =$. Sabemos que el radio del globo es de 17 cm.

Otro elemento que tenemos es el volumen del globo esférico $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Debemos de tener en cuenta que el radio r es una función del tiempo.

Obtenemos la derivada del volumen con respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{d\tau}$$

Simplificamos la expresión:

$$\frac{dv}{d\tau} = 4\pi r^2 \frac{dr}{d\tau}$$

Como deseamos conocer $\frac{dr}{dt}$ lo despejamos: $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dv/dt}{4\pi r^2}$

Pero sabemos que $\frac{dv}{dt} = 75$ cm³/s, lo que sustituimos en la fórmula anterior: $\frac{dr}{dt} = \frac{75}{4\pi r^2}$.

La función obtenida es una función del radio, en ella podemos sustituir cualquier radio y saber cuál es la rapidez con la que cambia.

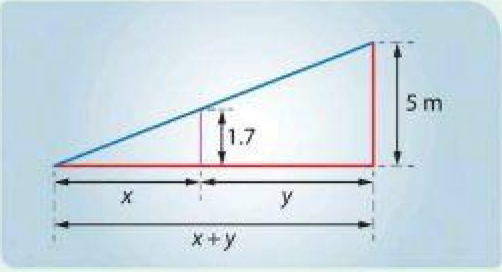
Sustituimos el valor del radio y realizamos operaciones para simplificar: $\frac{dr}{d\tau} = \frac{75}{4\pi(17)^2} = \frac{75}{1156\pi} = 0.02065159\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Ésta es la razón de cambio que buscamos.

Ejercicios

1. Se desea inflar un globo de forma esférica, para lo cual se bombea aire hacia su interior de tal manera que su volumen aumenta a razón de 200 cm³/s. Determina la rapidez con la que crece el radio del globo cuando su radio es de 270 cm.
2. Una lámpara de la calle se encuentra a una altura de 5 metros sobre la calle; si una persona mide 1.70 metros de altura y camina alejándose de la lámpara a una velocidad de 1.5 m/s, ¿qué tan rápido se alarga su sombra? ¿A qué razón se aleja la punta de la sombra del hombre?

   Dibujo para aclarar los puntos:



Resuelve los siguientes problemas.

3. El movimiento de una partícula está dado por la ecuación $f(t) = 3t^3 + 5t^2 + 4$, la cual es una función del tiempo medido en segundos. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de la partícula en el tiempo $t = 3$ y $t = 7$?
4. Se desea inflar un globo de forma esférica, para lo cual se bombea aire hacia su interior de tal manera que su volumen aumenta a razón de 25 cm³/s. Determina la rapidez con la que crece el radio del globo cuando su radio es de 5 cm.
5. Se tiene una barra de metal en forma de un cilindro circular recto. Cuando ésta se calienta su longitud (L) y su diámetro (D) aumentan en razón de 0.9 cm/min y 0.5 cm/min, respectivamente. ¿Cuál será la razón de cambio en el instante en el que la longitud de la barra es de 35 cm y el diámetro es de 2.5 cm?

DEDUCE Y APRENDE

Caída libre

Apertura de la actividad

Propósito: Determinará la velocidad instantánea de un objeto que se deja caer libremente.

Requisitos teóricos: Función

Límites

Gráficas

Equipo y material:

- Material impreso
- Colores

Desarrollo de la actividad

Problema: supongamos que se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio de 500 m de altura. Determina la velocidad del objeto a los 5 segundos.

Galileo determinó que la distancia recorrida *por cualquier cuerpo* que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo despreciando la resistencia del aire.

Expresamos la distancia recorrida después de t segundos $s(t)$ como:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$y(t) = 4.9\,t^2$$

Lo que en realidad se busca es encontrar la velocidad en el instante $t = 5$.

Para obtener la velocidad promedio sabemos que:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Así por ejemplo, si deseamos calcular la velocidad promedio entre el segundo $t = 5$ y $t = 6$ procederemos de la siguiente manera:

$$v = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{4.9(t_2)^2 - 4.9(t_1)^2}{6 - 5}$$

$$= \frac{4.9(6)^2 - 4.9(5)^2}{6 - 5}$$

$$= \frac{176.4 - 122.5}{1} = 53.9$$

Cierre de la actividad

Toma periodos más pequeños y calcula la velocidad promedio para cada caso.

Cuando el tiempo utilizado $|t_2 - t_1|$ se hace más pequeño la velocidad tiende a ____________________

Obtén el siguiente límite y compáralo con la pregunta anterior, si $f(x) = 4.9\,t^2$

$$\lim_{h \to 5} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

i. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 m/s. Su altura en metros después de t segundos se expresa por $y = 40t - 16t^2$. Encuentra la velocidad promedio para los periodos que se dan:

Tiempo (segundos)	Velocidad promedio
$t = 2.5$	
$t = 2.1$	
$t = 2.05$	
$t = 2.01$	

Determina la velocidad instantánea cuando t tiende a 2 y la función es $y(t) = 4.9\ t^2$

$$\lim_{t \to 2} \frac{f(x+t) - f(t)}{t}$$

ii. En la siguiente tabla se presentan los registros históricos del tipo de cambio del dólar en México, por día.

Mes de octubre de 2017		
Día	Compra	Venta
18	17.25	18.05
17	18.37	19.02
16	18.49	19.12
15	18.25	19.05
14	18.30	19.02
13	18.36	19.01
12	18.26	18.91

a) Realiza la gráfica del precio del dólar a la compra y a la venta, en una sola gráfica y diferentes colores.

b) Determina la velocidad que tiene el precio de venta y el de compra.

c) Determina la aceleración de crecimiento o decrecimiento.

iii. Las temperaturas que se pronostican en grados Celsius para un cierto día son:

Hora	Temperatura en grados Celsius
3	14
6	13
9	13
12	19
15	23
18	24
21	19
0	16

a) Realiza la gráfica de las temperaturas; con rojo marca cuando la temperatura aumenta (crece) y con azul cuando baja (decrece).

b) Determina la velocidad del aumento o disminución de la temperatura.

c) Determina la aceleración que se tiene.

4.2 Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar? ¿Qué métodos conocemos?

Derivada de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones trascendentes y los límites no son tan sencillos de obtenerse como los límites algebraicos.

En general si $f(x) = u$, es una función continua y derivable, entonces, las derivadas de las funciones trigonométricas las definimos, utilizando las siguientes notaciones.

Función	Lagrange	Leibniz
$y = \text{sen } u$	$y' = u' \cos u$	$\frac{d(\text{sen } u)}{dx} = \frac{du}{dx} \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \text{sen } u$	$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \text{sen } u$
$y = \text{tg } u$	$y' = u' \sec^2 u$	$\frac{d(\tan u)}{dx} = \frac{du}{dx} \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \csc^2 u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \text{ tg } u$	$\frac{d(\sec u)}{dx} = \frac{du}{dx} \sec u \text{ tg } u$
$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$	$\frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx} \csc u \cot u$

Ejemplos

Ejemplos de la derivada de una función.

1. Calcula la derivada de $y = \text{sen } 5x$ define $u = 5x$ y $u' = 5$,
   sustituyes en la derivada del seno $y' = 5 \cos 5x$

2. Calcula la derivada de $y = \cos (3x - 2)$ define $u = 3x - 2$ y $u' = 3$,
   sustituyes en la derivada del coseno $y' = -3 \text{ sen } (3x - 2)$

3. Calcula la derivada de $y = \text{tg } 2x$ define $u = 2x$ y $u' = 2$,
   sustituyes en la derivada de la tangente $y' = 2 \sec^2 2x$

4. Calcula la derivada de $y = \text{sen } 5x^2 + \cos (2x - 3)(3x + 5)$, observa que es una suma de funciones, donde $u = 5x^2,\ u' = 10x$; y $v = (2x - 3)(3x + 5)$

$$v' = 2(3x + 5) + (2x - 3)3 = 6x + 10 + 6x - 9 = 12x + 1$$

se sustituye en las fórmulas correspondientes $y' = 10x \cos 5x^2 - (12x + 1) \text{ sen } (2x - 3)(3x + 5)$

5. Calcula la derivada de $y = 5 \cot 2x$ define $u = 2x$ y $u' = 2$
sustituyes en la derivada del cotangente u' se multiplica por 5 $y' = -10 \csc^2 2x$

6. Calcula la derivada de $y = \sec (4x + 1)$ $y' = 4 \sec (4x + 1) \text{ tg } (4x + 1)$

7. Calcula la derivada de $y = \csc x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$
derivamos el cociente y simplificamos

$$y' = \frac{0(\text{sen } x) - (1)(\cos x)}{\text{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\text{sen } x}\,\frac{1}{\text{sen } x} = -\cot x \csc x$$

8. Calcula la derivada de $y = \text{sen} \cos 2x$ elegimos $u = \cos 2x$ y $u' = -2 \text{ sen } 2x$

$$y' = (-2 \text{ sen } 2x) \cos \cos 2x$$

Ejercicios

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \text{sen } (8x)$
2. $f(x) = \tan \left(\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{4}{5}x^2\right)$
3. $f(x) = \sec ((3x + 8)(x + 7))$
4. $f(x) = \csc^3 (x^3 + 5)(2x + 5)$
5. $f(x) = \left(4\sqrt[6]{x^7} + 4\right)(\sec 5x)$
6. $f(x) = \tan \dfrac{x + 3}{x^2 - x - 12}$
7. $y = \cot (x - 23)^9$
8. $y = \sec (25x^2 - 52)^{41}$
9. $f(x) = \csc (5x^3 + 5x)$
10. $f(x) = \csc \text{ sen } (7x^3 - 2x)$
11. $f(x) = \text{sen} \cos (6x + 8)$
12. $f(x) = \csc \tan \sec (4x^2 + x)$
13. $f(x) = \csc \text{ sen} \tan (x^3 + 4)$
14. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\text{sen } x - 4x^2}$
15. $f(x) = \dfrac{\cos 3x - 7}{\text{sen } x}$
16. $y = \tan x - x$
17. $y = \sec x^3 - 3x^2$
18. $y = x \text{ sen}^2 x \cos^3 x$
19. $f(x) = \text{tg } (7x)$
20. $f(x) = \text{sen} \left(\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2\right)$
21. $f(x) = \text{sen } ((8x + 2)(2x + 4))$
22. $f(x) = (6x + 1) \text{ sen } \left(\sqrt{x^6}\right)$
23. $f(x) = \text{sen } \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$
24. $y = \csc (3x - 3)^5$

25. $y = \text{sen}\,(6x - 36)^6$

26. $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{(x^2 - 1)^2}{x + 1}$

27. $f(x) = \sec\,(7x^3 - 4x)$

28. $f(x) = \cot\tan\,(3x^3 - 4x)$

29. $f(x) = \tan\cot\,(x + 4)$

30. $f(x) = \csc\cot\sec\,(x + 7)$

31. $f(x) = \csc\cos\text{sen}\,(2x + 5)$

32. $f(x) = \dfrac{\tan 4x}{\cot 2x - \sqrt{3}}$

33. $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 5}{\tan x}$

34. $y = \cos^2 2x - 6\,\text{sen}\,3x$

35. $y = \text{sen}\,(x - 3x^2)$

36. $y = 2x\tan^3 x\cot^2 x$

37. $f(x) = \cos\,(8x^2)$

38. $f(x) = \cos\,(3x^2)$

39. $y = \cot\left(\dfrac{1}{x^2}x^3 + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

40. $y = \sec\left(\dfrac{5}{x^3} - \sqrt{x^6}\right)$

41. $f(x) = \cos\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

42. $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{x - 121}{\sqrt{x} - 11}$

43. $y = \tan\,(5x - 36)^3$

44. $f(x) = \cot\dfrac{(2x^2 - 1)^2}{x - 5}$

45. $y = \cot\,(7x^3 - 4x)$

46. $f(x) = \sec\cos\,(3x - 4)$

47. $y = \sec\csc\,(2x - 5)$

48. $y = \cot\csc\,(x - 6)$

49. $y = \cos^2 2x^3$

50. $f(x) = \dfrac{\sec 4x}{2x - \text{sen}\,\sqrt{3}}$

51. $f(x) = \dfrac{\tan\,(5x + 5)}{\tan x - 3}$

52. $y = \cot 2x - 4x^2$

53. $y = \text{sen}\,(x - 3x^2)^2$

54. $y = x\,\text{sen}^2\,(x - \cos^3 x)$

Derivación de funciones implícitas

Decimos que una función es implícita cuando el valor de la función no está dado explícitamente.

Función implícita	Función explícita
$xy - 1 = 0$	$y = \dfrac{1}{x};\ x \neq 0$
$x^2 + y - 4 = 0$	$y = 4 - x^2$
$x^2 + y^2 = 25$	$y = \sqrt{25 - x^2}$ $y = -\sqrt{25 - x^2}$

En algunos casos es posible resolver para una variable, pero en otros casos será más sencillo utilizar la derivación implícita.

Este tipo de derivación consiste en derivar a cada término de ambos miembros de la igualdad con respecto a "x" y resolverlo para y' $\left(\dfrac{dy}{dx}\ \text{o}\ D_x\ \text{según la notación que se utilice}\right)$. Recuerda que si derivas a "y" debes de indicar que es respecto a "x". Utiliza la regla de la cadena.

Ejemplos

1. Deriva la función:

Función implícita			Función explícita
$x^2+y-4=0$			$y=4-x^2$
Usando y'	Usando $\frac{dy}{dx}$	Usando Dx	$\frac{dy}{dx}=$
$2x+y'=0$	$2x+\frac{dy}{dx}=0$	$2x+D_x=0$	
$y'=-2x$	$\frac{dy}{dx}=-2x$	$D_x=-2x$	Resuelve la derivada

En adelante utilizaremos y' para indicar $\frac{dy}{dx}$ o D_x

2. Obtén la derivada de la función $6x^2+xy-2y^2=3$, utiliza la notación $\frac{dy}{dx}$.

Solución

Derivamos cada uno de los términos, en el producto x y aplicamos la regla de derivada de un producto.

$$12x+y+x\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}=-12x-y$$

$$(x-4y)\frac{dy}{dx}=-12x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-12x-y}{x-4y}$$

Ejercicios

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $6x^2-2y^2=3$
2. $x^2+xy-2y^2-2=0$
3. $x^2+xy-3y^2=3$
4. $\operatorname{sen}(x-y)=\cos(x+y)$
5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$
6. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$
7. $y=x-\operatorname{sen}x$
8. $\cos(x+y)=\operatorname{sen}(x-y)$
9. $e^x\cos(x-y)=0$
10. $3x^2-4y^2=23$
11. $5x^2+xy-3y^2-7=0$
12. $3x^2+xy-y^2=4$

13. $\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y)$

14. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

15. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

16. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Derivada de la función exponencial

En general se tiene que si $f(x) = a^u$ y u es una función no nula de x, se tiene: $f'(x) = u'a^u \ln a$.

Utilizando otra notación $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Sea la función $f(x) = 2^{3x}$. Obtén su derivada.

Solución

Definimos $u = 3x$, de donde $u' = 3$.

Con la fórmula anterior se tiene: $y' = (3 \ln 2)2^{3x}$.

Ejercicio

Sea la función $f(x) = 2^{7x}$. Obtén su derivada.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = 6^{\operatorname{sen} x}$. Calcula su derivada.

Definimos $u = \operatorname{sen} x$ de donde $u' = \cos x$.

Utilizando la fórmula se tiene que $y' = \cos x \cdot 6^{\operatorname{sen} x} \ln 6$.

Ejercicios

Determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = 3^{2x}$
2. $y = 7^{-3x}$
3. $y = -3^{2x-5}$
4. $y = 4^{\ln x}$
5. $y = 9^{8x-5}e^{5x-x}$
6. $y = \dfrac{3e^{4x} - 2^{6 \ln 7x}}{\operatorname{sen} 8x - 9}$
7. $y = \dfrac{3e^{4 \cot x} - 5^{6 \ln 7x}}{\tan x - 9}$
8. $y = \dfrac{e^{4x - \cos x} - 9^{\operatorname{sen} x - \ln x}}{e^{\cos x - \ln x} - 5}$
9. $y = 3^{5x}$
10. $y = 3^{-4x}$
11. $y = -5^{6x-5}$

12. $y = 6^{\operatorname{sen} 2x}$
13. $y = 3^{2x} + e^{\cos 4x - 5}$
14. $y = \dfrac{3e^{6x} - 6^{3 \ln 7 - x}}{\cos 4x - 9}$
15. $y = \dfrac{e^{\ln \tan x} - 2^{6 \ln \operatorname{sen} x}}{e^{\operatorname{sen} 4x - 5}}$
16. $y = \dfrac{e^{4x - \operatorname{tg} x} - 9^{\cos x - \ln x}}{e^{\operatorname{sen} 2x - \ln x} - 5}$

Derivada de la función e^x

En general si u es una función de x se tiene que:

$$y = e^u \qquad\qquad y' = u' e^u$$

Ejemplo

Sea $f(x) = e^{\operatorname{sen} 3x}$; obtén su derivada.

Solución

Definamos a $u = \operatorname{sen} 3x$ $\quad u' = 3 \cos 3x$.

Al aplicar la fórmula: $y' = 3 \cos 3x\, e^{\operatorname{sen} 3x}$.

Ejercicios

I. Sea $f(x) = e^{\cos 5x}$; determina su derivada.

II. Determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = e^x$
2. $y = e^{3x}$
3. $y = e^{-8x}$
4. $y = e^{-6x}$
5. $y = e^{x - 8}$
6. $y = e^{3x - 5}$
7. $y = e^{\operatorname{sen} 2x}$
8. $y = e^{\ln x - 5}$
9. $y = e^{\ln \cos x}$
10. $y = e^{\ln \cot x}$
11. $y = e^{\operatorname{sen} x} e^{\tan x}$
12. $y = e^{\operatorname{sen} x} e^{\ln x}$
13. $y = e^{\operatorname{sen} 5x} e^{\cos \ln x}$
14. $y = e^{\operatorname{sen} 3x} e^{\ln x - 5}$
15. $y = e^{\tan x} e^{x - 5} e^{\ln 3x}$
16. $y = \dfrac{e^{3x} - \operatorname{sen} x}{e^{4x}}$
17. $y = \dfrac{e^{3x} - e^{5x}}{e^{4x}}$
18. $y = e^{2x}$
19. $y = e^{8x}$
20. $y = e^{-x}$
21. $y = e^3$
22. $y = e^{2x - 5}$
23. $y = e^{\cos x}$
24. $y = e^{\tan x - 2}$
25. $y = e^{\ln \operatorname{sen} x}$
26. $y = e^{\ln \tan 2x}$
27. $y = e^{\operatorname{sen} x} e^{\cos x}$
28. $y = e^{\ln \operatorname{sen} x} e^{\cot 5x}$
29. $y = e^{\tan x} e^{\ln \cos x}$
30. $y = e^{3x - 1} e^{\cos x - x}$
31. $y = e^{\operatorname{sen} x} e^{\cos x} e^{\tan x}$
32. $y = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$
33. $y = \dfrac{e^{3x} - \operatorname{sen} x}{e^{4x}}$

Derivada de la función $y = \log_a x$

En general, si $u = f(x)$, entonces:

$$y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

Ejemplo

Obtén la derivada de la función $y = \log_3 (4x - 5)$.

Sea $u = 4x - 5$, entonces $u' = 4$.

Al usar la fórmula se tiene:

$$y' = \frac{4}{(4x - 5) \ln 3}$$

Ejercicio

Calcula la derivada de la función $y = \log_5 (7x - 3)$.

Ejemplo

Determina la derivada de la función $y = \log_4 (\text{sen } 2x)$.

Sea $u = \text{sen } 2x$, entonces $u' = 2 \cos 2x$

$$y' = \frac{2 \cos 2x}{(\text{sen } 2x) \ln 4} = \frac{2 \cot 2x}{\ln 4}$$

Ejercicios

Determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \log (14x)$
2. $f(x) = \log (3x^2)$
3. $f(x) = \log (-x^2)$
4. $f(x) = \log (7x^3 + x + 3)$
5. $f(x) = \log (x^3 + 5x + 15)$
6. $f(x) = \log \left(\frac{6}{5}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{5}x \right)$
7. $y = \log \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right)$
8. $y = \log \left(\frac{5}{x^3} - \sqrt{x^6} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right)$
9. $f(x) = \log (7x)$
10. $f(x) = \log (5x^2)$
11. $f(x) = \log (-3x^2)$
12. $f(x) = \log (4x^3 - 8x + 5)$
13. $f(x) = \log (x^3 - x + 1)$
14. $f(x) = \log \left(\frac{5}{6}x^7 - \frac{7}{5}x + \frac{4}{7}x^3 \right)$
15. $y = \log \left(2\sqrt{x} + \sqrt{x^5} - 3\sqrt[3]{x^6} \right)$
16. $f(x) = \log (x + 8)(6x + 7)$

Derivada de la función logaritmo natural

La base de los logaritmos naturales es el número e, por lo que se tiene que si $y = \log_e x = \ln x$, por lo que se considera un caso especial.

En general si $u = f(x)$, entonces expresamos: $y = \ln u$ $\qquad y' = \frac{u'}{u}$

Ejemplo

Obtén la derivada de $y = \ln(4x - 5)$

Sea $u = 4x - 5$ la derivada es: $\qquad u' = 4$

$$y' = \frac{4}{4x - 5}$$

Ejercicios

I. Determina la derivada de $y = \ln(4x^2 - 5)$.

II. Obtén las derivadas de las siguientes funciones. Recuerda que los resultados se deben expresar con exponentes positivos y enteros. Realiza la reducción de términos semejantes.

1. $f(x) = \ln(4x)$
2. $f(x) = \ln(8x^2)$
3. $f(x) = \ln(-9x^2)$
4. $f(x) = \ln(-5x^2)$
5. $f(x) = \ln(4x^3 - 4x + 5)$
6. $f(x) = \ln \operatorname{sen}\left(\frac{6}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^2\right)$
7. $f(x) = \ln \sec\left(\frac{5}{6}x^7 - \frac{4}{7}x^3\right)$
8. $f(x) = \ln \cos\left(\frac{1}{5}x^8 - 2x^4\right)$
9. $y = \ln 2\sqrt{x} + \operatorname{sen} \ln \sqrt{x^5} - \log 3\sqrt[3]{x^6}$
10. $y = \ln \frac{1}{x^2} + \log \sqrt{x^4} + \operatorname{sen} \ln \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$
11. $y = \ln\left(\frac{9}{x^3} - \operatorname{sen} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$
12. $y = \ln\left(\frac{5}{\sqrt[2]{x^5}} - \tan \frac{7}{x^7}\right)$
13. $f(x) = \ln(x + 8)(6x + 7)$
14. $y = \ln \frac{\cos x - 8}{\operatorname{sen} x}$
15. $y = \ln \frac{\operatorname{sen} x - 2 \cot 3x}{\cos 4x}$
16. $y = \ln \frac{\ln \operatorname{sen} x - 2 \cos \ln 3x}{\cos x - \ln 2x}$
17. $f(x) = \ln(7x)$
18. $f(x) = \ln(-6x^2)$
19. $f(x) = \ln(-7x^2)$
20. $f(x) = \ln(7x^3 + 5x + 2)$
21. $f(x) = \ln \cos\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{5}x^2\right)$
22. $f(x) = \ln \tan\left(\frac{6}{5}x^3 - \frac{3}{8}x^2\right)$

23. $f(x) = \ln \csc\left(\frac{3}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3\right)$

24. $y = \ln \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{5}{x^4}\right)$

25. $y = \ln \frac{6}{x^2} + \cos \ln 5\sqrt{x}$

26. $y = \ln \frac{5}{x^3} - \cos \sqrt{x^6} - \operatorname{sen} \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$

27. $y = \ln\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \cos \frac{6}{x^7}\right)$

28. $y = \ln\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \cot \frac{16}{x^{17}}\right)$

29. $y = \ln \frac{\operatorname{sen} x - 2}{\cos x}$

30. $y = \ln \frac{\tan x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$

31. $y = \ln \frac{2 \operatorname{sen} 5x - 1}{\cos 4x + 3}$

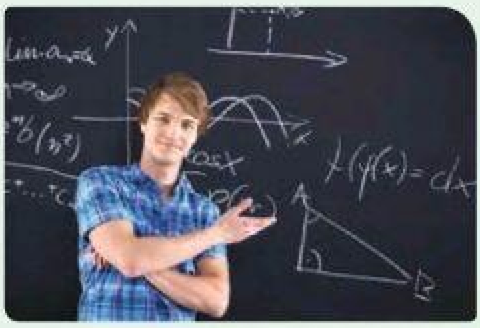
32. $y = \ln \ln \ln (3x)$

III. Determina la derivada de las siguientes funciones, utilizando las propiedades de los logaritmos y derivación implícita.

1. $y = x^n$
2. $y = uv$
3. $y = \frac{u}{v}$
4. $y = x^n$
5. $y = u^n$

IV. Utiliza las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita y obtén las siguientes derivadas.

1. $y = x^x$
2. $y = x^5x^x$
3. $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x-3)^3}$
4. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-4)^2}}{(x^2-3)^4}$
5. $\cos (x + y) = \operatorname{sen} (x - y)$
6. $y = x^{x-1}$
7. $y = x^{2x}$
8. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{(x-2)^4}$
9. $y = \frac{\sqrt[3]{(2x-5)^2}}{(x^3-2)^7}$
10. $e^x \cos (x - y) = xy$



Derivada de funciones trigonométricas inversas

En general, si $f(x) = u$, una función continua y derivable, entonces, las derivadas de las funciones inversas trigonométricas las definimos:

Función			Derivada
$y = \text{arc sen } u$	o	$y = \operatorname{sen}^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \text{arc cos } u$	o	$y = \cos^{-1} u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \text{arc tan } u$	o	$y = \tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$

Función			Derivada
$y = \text{arc cot } u$	o	$y = \cot^{-1} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \text{arc sec } u$	o	$y = \sec^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = \text{arc csc } u$	o	$y = \csc^{-1} u$	$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Ejemplo

Ejemplos de la derivada de una función inversa trigonométricas.

1. Calcular la derivada de $y = \text{arc sen } 5x$ define $u = 5x$ y $u' = 5$,

   sustituyes en la derivada del arc seno $y' = \dfrac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

2. Calcular la derivada de $y = \text{arc cos } 2x$ define $u = 2x$ y $u' = 2$,

   sustituyes en la derivada del arco coseno $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

Ejemplo

Obtén la derivada de la función, $y = e^{3x} \text{ arc cot } (4x^2 - 5)$.

Como observarás, tenemos un producto de dos funciones, por lo que definimos u y v y sus derivadas:

$$u = e^{3x} \qquad u' = 3e^{3x} \qquad v = \text{arc cot } (4x^2-5) \qquad v' = \frac{8x}{(4x^2-5)\sqrt{(4x^2-5)^2-1}}$$

Definimos $z = (4x^2 - 5)$ $\quad z' = 8x$

La derivada de la función es $y' = 3e^{3x}(\text{arc cot } (4x^2-5)) + e^{3x}\dfrac{8x}{(4x^2-5)\sqrt{(4x^2-5)^2-1}}$

Ejercicios

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = \text{sen}^{-1}\ 6x$
2. $y = \text{sec}^{-1}\ 6x$
3. $y = \text{arc sen } 2x$
4. $y = \text{arc cos } 2x$
5. $y = \text{sen}^{-1}\ 25x$
6. $y = \text{sen } x \text{ arc sen } 2x$
7. $y = \text{sen}^{-1}\ 8x^2$
8. $y = \text{sec } x \text{ arc sen } x$
9. $y = \cos^{-1} 3x$
10. $y = \cos x \text{ arc cos } -9x$
11. $y = 2x \text{ arc cos } 7x$
12. $y = 2x \text{ arc tan } 2x$
13. $y = \tan^{-1} 4x^2$
14. $y = 8 \tan^3 x \text{ arc tan } -5x$
15. $y = \cot^{-1} 6x$
16. $y = \text{arc sec } x \text{ arc csc } 2x$
17. $y = \cot^{-1} 8x^2$
18. $y = 3x \sec^2 x + \text{arc cot } x$
19. $y = \cot^{-1} 8x$
20. $y = \text{arc sec } x \text{ arc csc } 8x$
21. $y = \cos^{-1} 6x$
22. $y = \csc^{-1} 6x$
23. $y = \text{arc tan } 2x$
24. $y = \text{arc cot } 2x$
25. $y = 2x \text{ arc sen } 8x$
26. $y = \text{sen}^{-1}\ 4x^2$
27. $y = \tan x \text{ arc sen } x$
28. $y = \cos^{-1} 9x$
29. $y = \text{sen } x \text{ arc cos } -9x$
30. $y = \cos^{-1} 8x^3$
31. $y = \sec 2x \text{ arc cos } 3x$
32. $y = \tan^{-1} 7x$
33. $y = -6\cos x \text{ arc tan } -8x$
34. $y = -8x \text{ arc tan } 3x$
35. $y = 2x^5 \text{ arc cot } 8x$
36. $y = \cot^{-1} 4x^2$
37. $y = \text{arc sec } x + \text{arc cot } x$
38. $y = \cot^{-1} 6x$
39. $y = \text{arc sen } x \text{ arc cot } 2x$

40. $y = \sec^{-1} 8x^2$
41. $y = \tan^{-1} 6x$
42. $y = \cot^{-1} 6x$
43. $y = \text{arc sec } 2x$
44. $y = \text{arc csc } 2x$
45. $y = \text{sen}^{-1} 8x$
46. $y = \cos x \text{ arc sen } 8x$
47. $y = x \text{ arc sen } 6x$
48. $y = 2x \text{ arc cos } 5x$
49. $y = \cos^{-1} 6x^3$
50. $y = \cot 3x \text{ arc cos } 3x$
51. $y = \tan^{-1} 3x$
52. $y = 4 \text{ sen } x \text{ arc tan } 6x$
53. $y = \tan^{-1} 7x^2$
54. $y = 9 \sec^2 x \text{ arc sen } x$
55. $y = \cot^{-1} 8x$
56. $y = \text{arc cos } x \text{ arc cot } 8x$
57. $y = x^8 \text{ arc cot } 6x$
58. $y = 2x^5 \text{ arc csc } 8x$
59. $y = \cot^{-1} 4x^2$
60. $y = \tan x + \text{arc csc } x$

Derivadas sucesivas de una función

La derivada de una función es una nueva función de la misma variable. La derivada de esta derivada se le conoce como la segunda derivada, la cual es una nueva función, y se puede derivar sucesivamente recibiendo el nombre de tercera, cuarta derivadas, etcétera.

Notación de las derivadas sucesivas:

Cauchy	$D^2 f(x), D^3 f(x), D^4 f(x), \ldots, D^n f(x)$
Lagrange	$y', y'', y''', \ldots$
Lagrange	$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{iv}(x), \ldots, f^n(x)$
Leibniz	$\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplos

1. Determina la tercera derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 7x + 4$.

   Primera derivada $f'(x) = 10x + 7$ Segunda derivada $f''(x) = 10$ Tercera derivada $f'''(x) = 0$

2. Obtén la tercera derivada de la función $f(x) = \text{sen } 2x$

   Primera derivada $f'(x) = 2 \cos 2x$ Segunda derivada $f''(x) = -4 \text{ sen } 2x$ Tercera derivada $f'''(x) = -8 \cos 2x$

Ejercicios

I. Determina la tercera derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 3x^2 + 8x + 7$
2. $f(x) = x^2 - 7x + 2$
3. $f(x) = 8x^2 + 2x + 4$
4. $f(x) = 3x^2 - 7x + 8$
5. $f(x) = 5x^2 - 8x + 2$
6. $f(x) = 5x^3 + 4x + 8$
7. $f(x) = x^3 - 2x + 2$
8. $f(x) = x^3 + 5x + 5$
9. $f(x) = 7x^5 - 8x + 9$
10. $f(x) = 3x^4 + 2x + 1$

II. Obtén la segunda derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
2. $f(x) = \csc(5x)$
3. $f(x) = \csc(2x)$
4. $f(x) = \sec(8x)$
5. $f(x) = \sec(x)$
6. $f(x) = \log(14x)$
7. $f(x) = \ln(4x)$
8. $f(x) = \ln(7x)$

III. Determina la quinta derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \operatorname{sen}(8x)$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(7x)$
3. $f(x) = \cos(-7x^2)$
4. $f(x) = \cos(-5x^2)$
5. $f(x) = \tan(54x)$
6. $f(x) = \tan(57x)$
7. $f(x) = \cot(-8x^2)$
8. $f(x) = \cot(-9x^3)$
9. $y = e^x$
10. $y = e^{2x}$
11. $y = e^{3x}$
12. $y = e^{8x}$
13. $y = e^{-8x}$
14. $y = 3^{2x}$
15. $y = 3^{5x}$
16. $y = 7^{-3x}$

4.3 Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras)

Por mucho tiempo el hombre ha tratado de predecir el futuro, hoy en día el hombre sigue con esa necesidad y es de total importancia. Imaginemos por un momento que esto no se pudiera realizar, es decir, que no supiéramos la cantidad de gente que habrá en determinado lugar o en el mundo dentro de 10 años. Si así fuera, no conoceríamos las necesidades de agua, luz, petróleo, etc., que esta población va a necesitar. Esto en realidad provocaría un caos enorme. A continuación presentamos un ejemplo que nos permita predecir las temperaturas de un recipiente utilizando para ello la ley de rapidez de enfriamiento y calentamiento, descubierta por sir Isaac Newton. Esto nos permitirá por medio del cálculo diferencial determinar o predecir las temperaturas que tendrá un líquido. En este problema podemos apreciar cómo el dominio de la función son números entero: uno, dos, tres minutos, o bien podríamos pasar a incrementos más pequeños, es decir, uno, dos, tres segundos. Observa que el dominio de la función es un caso de dominio discreto o sea que las variables son enteras. En realidad nosotros podemos considerar que el dominio de la función es continuo, es decir, que las variables son continuas cuando el tamaño de la unidad es muy pequeño.

Ejemplo

Pensemos en un líquido el cual se acaba de calentar a una temperatura de 85 °C. Se sabe que la temperatura ambiente es de 20 °C y que al paso de 3 minutos la temperatura del líquido desciende a 71 °C. Hay que determinar las temperaturas que tendrá el líquido a los 6 y 9 minutos.

Solución:

Ley de rapidez de enfriamiento y calentamiento

La rapidez con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto (T) y la del medio ambiente (T_m) que los rodea. Así tenemos que utilizando cálculo diferencial podemos escribir que la derivada de la temperatura del objeto con respecto al tiempo $\frac{dT}{dt}$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

La cual es una ecuación diferencial. Para resolver la ecuación utilizaremos elementos desconocidos en este curso, el cálculo integral, el cual nos permite resolver la ecuación.

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

Separamos las variables: $$\frac{dT}{(T - T_m)} = Kdt$$

Utilizamos la integral a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int Kdt$$

El resultado que obtenemos en este momento lo vas a aceptar. En el siguiente curso podrás ver cómo se resuelve. Para este problema no es necesario poseer este conocimiento, sólo se hace a manera de justificar la obtención del modelo matemático de la ley.

$$\ln |T - T_m| = Kt + c$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos. Recuerda que $\ln e = 1$,

Aplicamos antilogaritmo $T - T_m = e^{Kt}e^{c}$, donde e^{c} es una constante $= C$

Al despejar T $T = T_m + Ce^{Kt}$

Esta será nuestra fórmula para realizar los cálculos de predicción de las temperaturas y la que utilizarás para resolver los siguientes problemas.

En nuestro ejemplo tenemos:

Temperaturas: $T(0) = 85$ °C, $T(3) = 71$ °C $T_m = 20$ °C

Al sustituir $T = T_m + Ce^{Kt}$

Los valores $T(0) = 85 = 20 + C\,e^{K*0}$

Obtenemos $85 - 20 = C\,e^{K*0}$ $e^{K*0}=1$

Por tanto $65 = C$ el valor de la constante

Para $T(3) = 71 = 20 + 65\,e^{K*3}$

$$71 - 20 = 65\,e^{K*3}$$

$$51 = 65\,e^{3K}$$

$$\frac{51}{65} = e^{3K}$$

$$\ln\left(\frac{51}{65}\right) = 3K\ln e$$

$$\ln\left(\frac{51}{65}\right) = 3K\ln e$$

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{51}{65}\right) = K$$

Así tenemos que al sustituir en $T = T_m + Ce^{kt}$, los valores obtenidos.

$$T = 20 + 65e^{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{51}{65}\right)t}$$

$$T = 20 + 65\,(0.9223)^t$$

Así tenemos que la temperatura a los 6 minutos es de:

$$T = 20 + 65\,(0.9223)^6 = 60$$

Y a los 9 minutos es $T = 20 + 65\,(0.9223)^9 = 51.30$

ACTIVIDAD TRANSVERSAL

1. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 °C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Si se sabe que su temperatura aumentó 2 °C en un segundo:

a) Calcula la función que nos proporciona la temperatura del cuerpo en cada instante *t*.

b) Determina el tiempo que tarda la barra en alcanzar 90 °C.

c) Calcula el tiempo que tarda la barra en alcanzar 98 °C.

2. Pensemos en un líquido el cual se acaba de calentar a una temperatura de 75 °C. Se sabe que la temperatura ambiente es de 30 °C y después de 3 minutos la temperatura desciende a 64 °C. Determina las temperaturas que tendrá el líquido a los 5 y 7 minutos.

3. En un automóvil el anticongelante del motor eleva su temperatura hasta los 95 °C. Si la temperatura ambiente es de 42 °C y después de 2 minutos la temperatura desciende a 90 °C, determina las temperaturas que tendrá a los 5 y 10 minutos

4. Una pieza de carne colocada en un horno que tiene una temperatura de 70 °C es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un refrigerador donde la temperatura se mantiene a 4 °C. Después de 2 minutos, la temperatura del cuerpo ha disminuido a 60 °C. ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos? ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga 50 °C?

5. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es de 15 °C. Después de 1 minuto el termómetro marca 55 °C y después de 5 minutos marca 30 °C. ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?

6. Un objeto se mueve de acuerdo con la ecuación $y = \operatorname{sen} t$, donde y está dado en metros y t en segundos.

a) Determina la velocidad que lleva el objeto a los 5 y a los 7 segundos.

b) Calcula la aceleración a los 6 segundos.

c) Determina cuándo la aceleración es cero.

7. Dada la función $f(x) = \cos x$, determina los intervalos de crecimiento de la función en el intervalo de $[0, 2\pi]$.

8. En la función $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, determina dónde hay valor máximo y un valor mínimo en el intervalo de $[0, 2\pi]$.

9. Determina si la función $f(t) = e^{2x}$ es creciente o decreciente.

10. Si un objeto se mueve de acuerdo con la función $f(t) = e^{2t}$, donde t se mide en segundos y $f(x)$ se mide en metros.

a) Determina la velocidad en los segundos 2, 5 y 7.

b) Calcula la aceleración del objeto en los segundos 5 y 7.

ACTIVIDAD FORMATIVA CON TIC

1. Lee cuidadosamente el artículo que encontrarás en la siguiente dirección electrónica, escribe las palabras que no entiendas, busca su significado y anéxalas en el glosario.

https://www.muyinteresante.es/ciencia/articulo/cientificos–identifican–nuevos–tipos–de–neuronas–humanas–291502448984

2. Contesta las preguntas que se plantean.

a) Investiga el tamaño de una neurona, así tendrás una idea de cuando se dice que el incremento es muy pequeño, o nos acercamos tanto como deseamos pero no estamos en el mismo lugar.

b) Investiga el número de neuronas que tiene el cerebro, de esta manera tendrás una idea de lo que será grande.

c) Determina cuál es la importancia del artículo.

d) ¿Qué materias se mencionan en este estudio?

e) ¿Por qué dos neuronas son diferentes?

f) ¿Qué es el ARN?

g) ¿Qué estudios tienen los investigadores?

Actividad socioemocional

Fuera del salón de clases:

1. ¿Como consideras tu desarrollo en el trabajo extraclase?

2. ¿Puedes desarrollar todas las actividades encomendadas?

3. ¿Si no las desarrollas a qué lo atribuyes?

4. ¿Tienes un método de estudio?

CIERRE

EVALUACIÓN SUMATIVA

Deriva las siguientes funciones.

1. $y = \ln(3x - 5)$
2. $y = e^{\ln 3x}$
3. $f(x) = \sec(4x^2 + x)\cot(x + 1)$
4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{\ln 4x - 2x}$
5. $f(x) = (e^x - 1)(\ln 5x - 5)^2$
6. $y = e^{5x - x}$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(5x^3 + 5x)$
8. $f(x) = \dfrac{\tan x - 5}{\csc(3x - 2)}$
9. $f(x) = (\ln 6x^2 - 2^{3x})^5\,(2x \operatorname{sen}(4x-5))$
10. $f(x) = \dfrac{\tan(4x - 5) - \sec(x - 1)}{\operatorname{sen} 4x - \ln x}$

Deriva las siguientes funciones implícitamente:

1. $6x - 2y^3 = 3x$
2. $2x^2 + 3xy - y^2 - 20 = 0$
3. $6x^2 + 2xy - 5y^2 = 3$
4. $\operatorname{sen}(2x - y) = \cos(x + 2y)$
5. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
6. $x^2 - 5y^2 = 23x$
7. $5x^2 + 4xy - 3y^2 - 5 = 0$
8. $2x^2 + 7xy - 4y^2 = 8$
9. $\operatorname{sen}(3x + 2y) = \cos(4x - 5y)$
10. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

1. AUTOEVALUACIÓN

Aspecto a evaluar	Excelente	Bueno	Regular	Satisfactorio
Realicé los ejercicios correctamente	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Trabajé en equipo	Más de 90% Valor: 15 puntos	Entre 80 y 89% Valor: 11 puntos	Entre 70 y 79% Valor: 7 puntos	Menos de 70% Valor: 3 puntos
Actividad integradora (ver puntaje)	Valor: 10 puntos	Valor: 7 puntos	Valor: 4 puntos	Valor: 2 puntos
Lectura	Contesté correctamente más de 90% de las preguntas. Valor: 5 puntos	Contesté correctamente entre 80 y 89% de las preguntas. Valor: 4 puntos	Contesté correctamente entre 70 y 79% de las preguntas. Valor: 3 puntos	Contesté correctamente menos de 70% de las preguntas. Valor: 2 puntos
Trabajo extraclase	Realicé todas mis tareas. Valor: 5 puntos	Realicé 80% de mis tareas. Valor: 4 puntos	Realicé 60% de mis tareas. Valor: 3 puntos	Realicé 50% de mis tareas. Valor: 2 puntos
Suma de puntos por columna				
Total de las columnas	De 45 a 50 puntos	De 40 a 44 puntos	De 35 a 39 puntos	Menos de 35 puntos

2. AUTOEVALUACIÓN DISCIPLINAR

Revisa la actividad y contesta el dominio que tienes de los siguientes conceptos.

Concepto	Lo domino	No lo domino
Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada).		
Graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).		
Optimización de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).		

Glosario

Ángulo de inclinación de una recta: Es el ángulo que se forma entre la recta y la horizontal.

Concavidades: Una función es cóncava hacia arriba si $f''(x_o) > 0$. Una función es cóncava hacia abajo si $f''(x_o) < 0$.

Contradominio de una función: Es el conjunto de todos los resultados que se obtienen luego de realizar la función de todas sus operaciones.

Derivada: Es la pendiente de la recta tangente a la curva.

Dominio de una función: Es el conjunto donde la función puede realizar todas sus operaciones.

Función: Es un tipo de relación, en la que a un elemento del dominio le corresponde un elemento en el contradominio.

Función constante: son funciones que siempre toman el mismo valor. $F(x) = 5$.

Función continúa: Es aquella que su gráfica se puede realizar sin levantar el lápiz del papel.

Función creciente: Una función es creciente si para toda x_o, del dominio de la función la derivada es mayor que cero $f'(x_o) > 0$.

Función decreciente: Una función es decreciente si para toda x_o, del dominio de la función la derivada es menor que cero $f'(x_o) < 0$.

Función discontinua: Es aquella donde se despega el lápiz del papel para el trazo de su gráfica.

Función polinómica: Es una función la cual tiene como expresión un polinomio.

Función racional: Es aquella que se escribe como el cociente de dos polinomios y el divisor no puede ser el polinomio cero.

Función radical o funciones irracionales: Son aquellas expresiones que están contenidas dentro de un radical.

Imagen: Cuando se toma un elemento del dominio y le aplicamos la función, al resultado obtenido se le llama imagen.

Límite: La noción intuitiva se refiere a la aproximación hacia un punto ya sea en una sucesión o una función, a medida que nos acercamos a dicho punto.

Limite por la derecha: Dada una función $f(x)$ y un valor x_o y se toman valores mayores tales que se aproximen a x_o tan próximos como se desean.

Limite por la izquierda: Dada una función $f(x)$ y un valor x_o y se toman valores menores tales que se aproximen a x_o tan próximos como se desean.

Pendiente de una recta: Es la inclinación de la recta.

Punto de inflexión: Es el punto donde la curva cambia de sentido, si $f''(x_o) = 0$.

Secante: Es la recta que corta en dos puntos una curva.

Tangente: Es la posición límite de la secante cuando esta toca un punto de la curva.

Valor absoluto: se simboliza por un número entre dos barras $|a|$, se lee valor absoluto de a, se define como (a), si a es mayor o igual que cero y $(-a)$ si a es menor que cero.

Valor máximo: Existe un valor máximo en x_o si se cumple que $f'(x_o) = 0$ y la función cambia de creciente a decreciente.

Valor mínimo: Existe un valor mínimo en x_o si se cumple que $f'(x_o) = 0$ y la función cambia de decreciente a decreciente.

Bibliografía

LEITHOLD LOUIS, *El cálculo*, 7ª ed., Ed. Oxford University Press.

GRANVILLE, *Cálculo diferencial e integral*, Ed. Limusa.

CABALLERO, *Iniciación al cálculo diferencial e integral*, Ed. Limusa.

THOMPSON, *Cálculo diferencial e integral*, Ed. McGraw–Hill Higher.

Direcciones electrónicas

Estas direcciones te podrán servir durante el curso.

http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=fb4c835feb0a65cc39739320d7a51c02

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/limit_derivative/derivative/

https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc

https://www.youtube.com/watch?v=ZmbXtZDgr4l

https://www.youtube.com/watch?v=jirfBNkSRPQ

https://www.youtube.com/watch?v=PjaYdAERPXQ

https://www.youtube.com/watch?v=sMxlbTVDifo

https://www.youtube.com/watch?v=QEoHDt–7JS0