# Cálculo Diferencial

José Villa Morales

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

**Dedicado a**

**José Ramón, José Miguel, María José,**

**mis hijos, su existencia me anima a seguir adelante.**

**Ana Cecilia,**

**mi esposa, su compañía me reconforta en los momentos de ansiedad.**

**Palermo e Irma,**

**mis padres, su ejemplo me inspira.**

**María de la Luz Palacio Cháires,**

**por los gratos e inolvidables recuerdos que dejó entre nosotros.**

**Jesús,**

**mi Dios, y quien sin Él nada de lo anterior sería posible.**

**Cálculo Diferencial**

Primera edición 2015



ISBN 978-607-8359-99-8

Impreso y hecho en México / *Printed and made in Mexico*

# Índice general

# Prólogo

El propósito de este trabajo es presentar al alumno de la asignatura de Cálculo Diferencial, a nivel bachillerato o licenciatura, un enfoque entre práctico y riguroso a la vez. La verdad es que el Cálculo Diferencial es un área de las matemáticas clásica, por ende, se desea informarle al lector que no hay nada nuevo aquí, salvo la organización y la presentación de los tópicos. Así es, hay una vasta, y muy buena, literatura de Cálculo Diferencial y lo que se espera es que este enfoque y los detalles propios de la obra sean de interés para el lector.

Más específicamente, hay muchos libros teóricos (por ejemplo [1], [3]) y prácticos (por ejemplo [4], [6]), pero es reducido el número de aquellos que tienen ambos enfoques, como es el caso de la presente obra. Es decir, la mayoría de los libros pretenden que el alumno sepa realizar operaciones o bien demostraciones, y son pocos los que estudian el aspecto geométrico de la derivada para poder así hacer operaciones con este concepto. El propósito es presentar esta alternativa, que en cierto sentido es nueva. Sabemos que la mayoría prefiere uno u otro enfoque, sin embargo, esta obra es para quien desea cubrir ambos aspectos del Cálculo Diferencial: el operativo y el geométrico. No obstante, es importante señalar que, por lo ambicioso del objetivo, esta obra no es exhaustiva en ninguno de los dos enfoques.

El estudio del Cálculo Diferencial se inicia tratando el concepto de función, luego se estudia el concepto de límite de una función (el cual es uno de los conceptos centrales del Cálculo Diferencial), después el de continuidad y se finaliza con el de diferenciabilidad de una función y aplicaciones de este concepto. En el apéndice se presentan algunos tópicos básicos, los cuales incluimos con la finalidad de que la obra sea lo más autocontenida posible. No obstante, se asume el manejo de algunos conceptos elementales de álgebra.

Cabe mencionar que en la preparación de los ejemplos, y quizá en algún enfoque, me he basado en el libro: *Cálculo con Geometría Analítica*, Segunda Edición de Earl W. Swokowski, Grupo Editorial Iberoamérica, 1989. Éste es un buen libro que cubre a cabalidad el aspecto práctico del Cálculo Diferencial.

Quiero expresar mi agradecimiento a **Ana Bertha Campos González** quien capturó la primera versión de este libro. De igual forma, agradezco todo el apoyo del Departamento Editorial de la UAA.

# Capítulo 1

# Introducción general

En este capítulo hablaremos brevemente del origen del Cálculo Diferencial y daremos motivos de por qué es importante comprender sus conceptos y sus métodos.

## 1.1. Orígenes y desarrollo del Cálculo Diferencial

El Cálculo Diferencial se inició en 1666 con los trabajos de Isaac Newton (1648-1727) cuando estudiaba algunos problemas relacionados con el desplazamiento de objetos, en particular aquellos que se relacionaban con la caída libre de los cuerpos. Casi a la par, Gottfried Leibniz (1646-1716) realizó investigaciones similares; a él se deben los nombres de "derivada" y "ecuación diferencial", además de los símbolos "$dx$", "$dy/dx$".

En el Cálculo Diferencial juegan un papel fundamental los conceptos de función y de límite. La palabra "función" fue introducida por Leibniz y el primero en tratar de definir este concepto fue Jacobo Bernoulli (1667-1748): "Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de manera que sea, por esa variable y por constantes". Euler (1707-1743) introduce otras definiciones de función y usa por primera vez la simbología $f(x)$. En esta época se obtuvieron otras definiciones imprecisas del concepto de función, y fue el matemático alemán Dirichlet quien proporcionó la definición rigurosa de este concepto en términos de conjuntos. Por otra parte, el concepto de límite es muy antiguo; aparece por ejemplo en los trabajos de Eudox. En el desarrollo formal del concepto de límite contribuyeron notables matemáticos como Newton, Leibniz, Euler, D'Alembert (1717-1783) y Cauchy (1789-1857). Sin embargo, la definición actual es la de Weierstrass (1815-1897). Otro concepto esencial del Cálculo Diferencial es el de función continua, este objeto matemático fue introducido por Bolzano (1781-1848). Bolzano definió la continuidad de una función basado en el concepto de límite, además estudió algunas propiedades importantes de estas funciones.

En la actualidad el Cálculo Diferencial es un área de las matemátias con conceptos bien definidos y métodos que se pueden usar en un sin número de aplicaciones, de ahí su éxito e importancia.

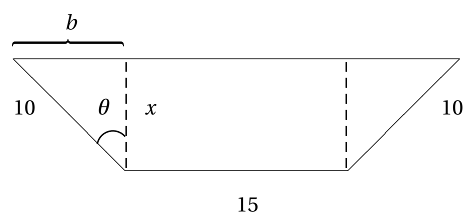
## 1.2. Aplicaciones del Cálculo Diferencial

Como veremos a lo largo de este libro (en especial ver el Capítulo 14), las aplicaciones del Cálculo Diferencial son muy variadas. Como introducción, y a manera de motivación de los conceptos que trataremos, consideraremos los siguientes ejemplos.

### 1.2.1. Un ejemplo elemental

Se requiere construir un canal de una hoja de metal, de 2 m de largo y de 35 cm de ancho, que tenga un caudal máximo. Más aún, se desea que el canal tenga la forma


Por lo tanto, para que el canal tenga un caudal máximo necesitamos determinar el ángulo $\theta$ conveniente en el que se deben doblar los lados de la hoja de metal. Sea $x$ la profundidad del canal




Observamos que el canal tendrá un caudal máximo si el área $A$ del trapecio es la más grande posible. Esto se logrará si determinamos una $x$ con esta propiedad. De la relación

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{10},$$

obtenemos que el ángulo buscado será

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{10}\right). \tag{1.1}$$

Para calcular el área deseada estudiemos primero una parte de ésta. Más específicamente, el triángulo del lado izquierdo que se forma en la figura anterior. Sea $b$ la base de éste triángulo. Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que

$$b = \sqrt{10^2 - x^2}.$$

Por lo tanto, el área de este triángulo es

$$\frac{1}{2}bx = \frac{x}{2}\sqrt{100-x^2}.$$

Puesto que el trapecio está formado por dos triángulos, de igual área, y un rectángulo, entonces su área $A$ es

$$\begin{aligned} A &= 2\big(\text{área del triángulo}\big) + \text{área del rectángulo} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}bx\right) + 15x = 15x + x\sqrt{100-x^2}. \end{aligned}$$

Esto nos indica que el área $A(x)$ es función de la profundidad $x$ del canal. El propósito de estas notas es iniciar el estudio de objetos matemáticos de este tipo.

Por ejemplo, del planteamiento del problema podemos notar que el valor más grande de $x$ es 10 y el menor es 0. Así, la $x$ toma valores en el intervalo $[0,10]$, a esto se le llama dominio de la función $A$. También notamos que cuando $x=0$, entonces el área es 0, es decir, $A(0)=0$. En este caso obtenemos el área mínima, la cual no es es de interés pues no habría canal y todo el líquido se tiraría. Nos interesa el valor de $x$ para el cual el área, $A(x)$, es máxima. Así, uno de los objetivos principales del libro es mostrar cómo encontrar dicha $x$, y de (1.1) obtener el ángulo óptimo para el doblez de la lámina.

Podemos decir que la moraleja del ejemplo es que al tratar de resolver un problema "real" hay que expresar la cantidad de interés en términos de una (o varias) variable(s) y aplicar los métodos del Cálculo Diferencial para encontrar la solución óptima.

### 1.2.2. Un modelo matemático

En ocasiones el conocimiento de las herramientas matemáticas juega un papel relevante en problemas de la vida real, damos a continuación un esbozo de uno de éstos.

La observación cuidadosa del crecimiento de los niños en edad temprana en ocasiones puede evitar complicaciones graves. En efecto, es conveniente llevar un registro del crecimiento de la circuferencia de la cabeza, del incremento en el peso y de la estatura, por mencionar las más importantes. De este modo, si un niño no está creciendo "según el promedio" se pueden tomar medidas preventivas para corregir el problema. Tan sencillo como vigilar la alimentación o bien si se trata de una enfermedad grave suministrarle los medicamentos necesarios.

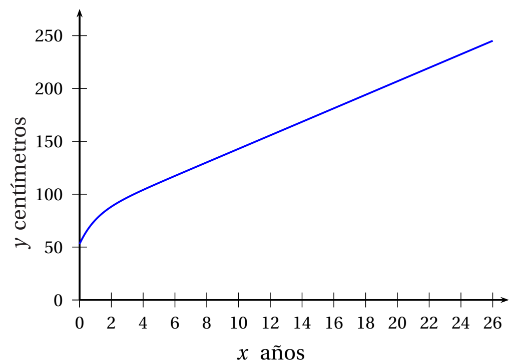
Con la finalidad de tener un buen punto de referencia se toma una muestra suficientemente grande de niños sanos. A ellos se les mide, por ejemplo, la estatura y se le vigila durante cierto tiempo su desarrollo. Si resultan niños sanos, entonces significa que su crecimiento es conveniente y vale la pena considerar su estatura. Se toma el promedio de la estatura de estos niños sanos y así, a grandes rasgos, se obtienen diferentes tablas de crecimiento.

Por lo tanto, es conveniente contar con una expresión matemática que represente la altura $h$ (en centímetros) de un niño conociendo su edad $x$ (en años). Esto nos puede ayudar, por ejemplo, a predecir el crecimiento de un niño sano o bien a determinar cuál es la edad de mayor o menor crecimiento en un niño sano. Una expresión muy usada es el modelo de Jenss (ver [7])

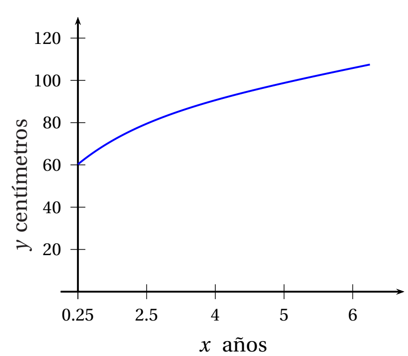
$$h(x) = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}.$$

A este tipo de expresiones se les llama modelo matemático. En este caso, el modelo representa el crecimiento en la estatura de niños sanos.

La gráfica de $h$ tiene la siguiente forma




De esto notamos que en los primeros dos años de vida el crecimiento es bastante acelerado y después es más estable. De hecho, para edades grandes ($x$ grande) el comportamiento es lineal (ver el Ejemplo 5.8). Por otra parte, sabemos que en la adolescencia ($x \in [12, 18]$) el crecimiento también es bastante notorio, por lo tanto el crecimiento no debe de ser lineal en este periodo. El modelo matemático nos indica que a los veintiséis años de edad ($x = 26$) se tiene una estatura de casi dos metros y medio ($y = 250$ cm), lo cual es poco probable. Más aún, el modelo refleja que se crece indefinidamente, lo cual es absurdo pues hay un momento en el que se deja de crecer. Así, el modelo de Jenss no es adecuado en cualquier rango. De hecho, es conocido que este modelo es el más preciso para niños en edad preescolar, es decir, niños de 3 meses a 6 años de edad, en cuyo caso la gráfica se ve así




Es en este rango donde el modelo Jenss es útil, por ende el dominio de $h$ es $[0.25, 6]$.

Por ejemplo, vemos que la mayor tasa de crecimiento es a los 3 meses y que un niño de dos años debe medir en promedio 88 cm (nótese que el modelo es para varones, el promedio en las niñas es de 86 cm, según la Organización Mundial de la Salud (OMS)). Si un niño no tiene en promedio esta estatura entonces es conveniente llevarlo a una revisión médica. Por cierto, según la OMS, el peso promedio en niños de dos años es de 12.9 kg y el de las niñas es de 12.4 kg.

De este ejemplo podemos aprender el importante papel que juegan las funciones trascendentes, como la función exponencial, en la expresión de modelos matemáticos. Además, que los modelos matemáticos modelan cantidades de interés en cierto rango y podemos usar estas expresiones matemáticas para obtener datos específicos, como la edad de mayor crecimiento en niños en edad preescolar, ver el Ejemplo 11.7.

**Ejercicio 1.1** *Investigar en la web al menos tres modelos matemáticos. ¿Qué modelan y qué información útil proporcionan?*

**Ejercicio 1.2** *Escribir dos situaciones en las que creas sea posible obtener un modelo matemático y qué información útil puede proporcionar.*

**Ejercicio 1.3** *Considerando que al inicio se crece muy rápido (niñez-adolescencia), luego la altura se estaciona (etapa adulta) y finalmente comienza a decrecer (vejez), describir una gráfica que represente la altura de una persona con respecto a su edad. ¿Hay una única edad en la que la altura es máxima?*

# Capítulo 2

# Funciones

En este capítulo introducimos el concepto de función e iniciamos el estudio de sus propiedades. Por ejemplo, su gráfica y algunas clasificaciones como funciones inyectivas, sobres, pares e impares.

## 2.1. Definición de función y su gráfica

El objeto de estudio del Cálculo Diferencial es la función. La definición rigurosa de este objeto matemático está dada en términos de conjuntos y darla está fuera del propósito de estas notas, para más detalles se suguiere consultar la referencia [8]. Para nosotros será suficiente con tener una noción clara de este concepto, el cual describimos a continuación.

Una función $f$ de un conjunto $X$ a un conjunto $Y$ es una regla (de correspondencia) que asigna a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$. El conjunto $X$ se llama dominio de la función, y se suele denotar por $D(f)$ o $D_f$. El punto $y = f(x)$ es el valor que toma la función $f$ en el punto $x$. En símbolos, se acostumbra escribir

$$f : X \to Y.$$

El conjunto de valores que toma la función $f$ se llama imagen o rango y se denota por $R(f) = \left\{ f(x) : x \in X \right\}$ o $I(f)$. La variable $x$ se llama variable independiente y la variable $y$ se llama variable dependiente.

En general estudiaremos funciones en las que $X$, $Y$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$, en este caso se dice que son funciones reales de variable real. En la Sección 15.1 del Apéndice se revisan algunos conceptos básicos de conjuntos.

Es frecuente que una función esté expresada por una fórmula.

**Ejemplo 2.1** *Funciones expresadas por una fórmula:*

$$(a)\ f(x) = x^3 - 2,\ x \in \mathbb{R}, \quad (c)\ f(x) = \frac{x^3 - 7}{x - 2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$
$$(b)\ f(x) = \operatorname{sen}(x) - 2x^{5/2},\ x \in \mathbb{R}_+, \quad (d)\ f(x) = e^x - \ln(x),\ x > 0.$$

*Donde* $\mathbb{R}_+$ *denota al intervalo* $[0,\infty)$.

Sin embargo, nótese que hay otras funciones que no necesariamente se pueden expresar por fórmulas.

**Ejemplo 2.2** *(a) Sea x un día del año 1971 y sea y la temperatura máxima durante ése día.*

*(b) Sea*

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$$

Ambas son funciones que no se expresan por una fórmula. En el caso de la función $g$ se dice que está definida a trozos (o por partes).

**Ejemplo 2.3** *Se tienen* 10 *km de malla para cercar un terreno en forma rectangular. Se quiere que uno de los lados del terreno esté a un lado de un río, en ese lado no se ocupará cerca. Expresar el área cercada en términos de uno de los lados.*

**Solución.** Sea $x$ el lado del terreno por cercar que es paralelo al río y sea $y$ el lado del terreno perpendicular al río. De este modo, el área de interés será

$$\text{Área} = x\,y.$$

Aquí hay dos variables $x, y$. Debido a que tenemos 10 km de cerca y que uno de los lados es paralelo al río (el de longitud $x$), entonces

$$2y + x = 10.$$

Así, despejando,

$$y = 5-\frac{1}{2}x.$$

Por lo tanto

$$\text{Área}(x) = x\left(5-\frac{1}{2}x\right) = 5x-\frac{1}{2}x^2.$$

Por ende, el área del terreno cercado, $A$, es función de $x$. Nótese que el problema indica que $x$ no puede ser negativa ni mayor que 10, por lo tanto $0\le x\le 10$. En símbolos $D(A)=[0,10]$. Más adelante (ver el Ejemplo 2.8) veremos cómo encontrar el ancho del terreno (es decir la $x$) que nos da el área máxima. ∎

Es conveniente conocer que hay reglas de correspondencia (o asignaciones) que no son funciones.

**Ejemplo 2.4** *Sea* $x\in\mathbb{R}$ *y denotemos por* $y$ *el número real tal que* $x^2+y^2=1$. *¿Es esta regla de correspondencia una función?*

**Solución.** Si $x=0$, entonces

$$0+1^2=1 \quad \text{y} \quad 0+(-1)^2=1.$$

Es decir, según la regla de correspondencia a 0 le podemos asignar los valores 1 y $-1$. Así, esta regla de correspondencia no es una función, pues queda ambigua la asignación de $y$ cuando $x=0$, por ejemplo. ∎

**Ejercicio 2.1** *Sea $X$ el conjunto formado por todos los habitantes de México. Para cada $x \in X$ sea $y$: (a) su nombre, (b) su CURP. ¿Cuál de estas dos asignaciones es una función?.*

Es muy conveniente tener una imagen del comportamiento de una función, el siguiente concepto ayuda en ese sentido.

**Definición 2.1** *Sea $f : X \to Y$, con $X, Y \subset \mathbb{R}$. El conjunto*

$$G\left(f\right) = \left\{(x, y) : \; x \in X, \; y = f(x)\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

*se llama gráfica de la función f.*

Una de las gráficas más elementales es la de una línea recta. Recordemos que si la recta pasa por dos puntos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, entonces los demás puntos $(x, y)$, de la recta, están determinados por

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

Despejando $y$ de (2.1) obtenemos

$$y = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x = b + m x,$$

donde

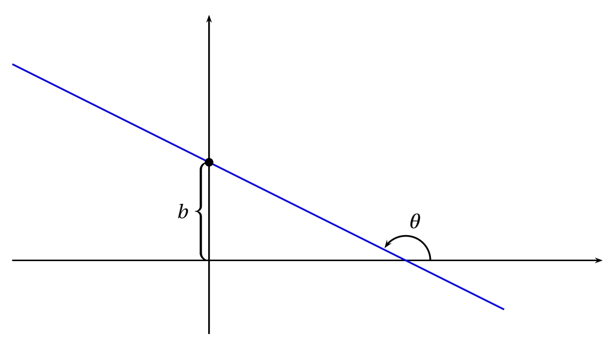
$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Los números $b$ y $m$ se llaman ordenada al origen y pendiente, respectivamente. El primero indica el punto por donde pasa la recta en el origen y el segundo indica el ángulo de inclinación, $\theta$, de la recta con respecto al eje horizontal, $m = \tan(\theta)$.

Supongamos que conocemos la pendiente, $m$, y la ordenada al origen, $b$, de una línea recta. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ tiene sentido la operación

$$L(x) = b + m x.$$

Así $D(L) = \mathbb{R}$. La gráfica de $L$ tiene la forma



Estudiemos ahora el rango o imagen de la línea recta. Dado $y \in \mathbb{R}$ buscamos un $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in G(L)$. Geométricamente esto significa que al trazar una línea paralela al eje horizontal ésta corta a la gráfica $G(L)$ y la proyección, sobre el eje horizontal, es el punto $x$ buscado. Más precisamente, dado $y \in \mathbb{R}$, el número

$$x = \frac{y-b}{m},$$

cumple que $(x, y) \in G(L)$, $y = L(x)$. Así, el rango de $L$ es $\mathbb{R}$, $R(L) = \mathbb{R}$.

**Ejemplo 2.5** *Trazar la gráfica de la función,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x) = 2x - 1.$$

**Solución.** Lo que daremos es un bosquejo de la gráfica de $f$. Para esto hacemos una tabla dando valores a $x$ y anotando los valores de $y = f(x)$. Por ejemplo,

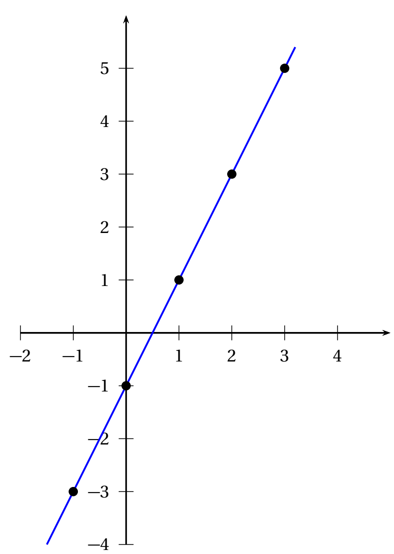
$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3,$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Así, se obtiene la tabla

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ |

Al representar las parejas ordenadas $(x, y) = (x, f(x))$ en el plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, nos queda




Nótese que la ordenada es $b = -1$ y la pendiente es $m = 2$. ■

### 2.1.1. Función valor absoluto

La función valor absoluto se define por medio de la siguiente regla de correspondencia: Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$ hacemos $y = x$ y si $x < 0$ hacemos $y = -x$. Denotamos a $y$ por $|x|$. En símbolos

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Este es un ejemplo de una función definida por trozos. Nótese que esta regla de correspondencia está bien definida para cualquier número real, por lo tanto su dominio es $\mathbb{R}$. Observamos que

$$|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, si $x \geq 0$, entonces

$$|x| = x \geq 0.$$

Ahora, si $x < 0$, entonces $-x > 0$ (ver las propiedades de las desigualdades en la Sección 15.2 del Apéndice), así

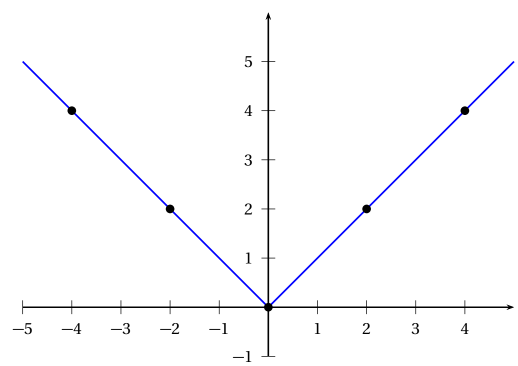
$$|x| = -x \geq 0.$$

Como consecuencia de esto tenemos que la imagen de la función valor absoluto está contenida en $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

**Ejemplo 2.6** *Trazar la gráfica de la función valor absoluto.*

**Solución.** Consideremos la tabla

| $x$ | $\lvert x\rvert$ |
|---|---|
| -4 | 4 |
| -2 | 2 |
| 0 | 0 |
| 2 | 2 |
| 4 | 4 |



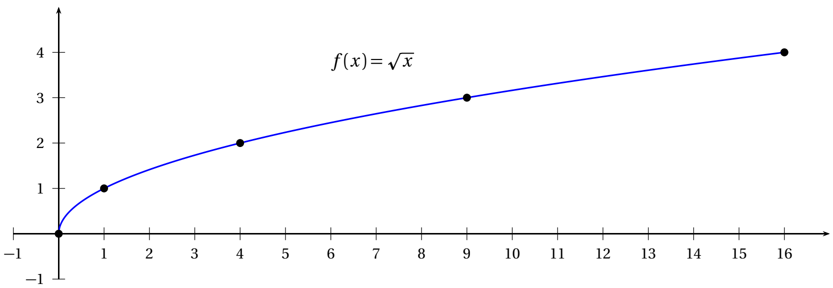

De la gráfica de la función valor absoluto apreciamos que nunca es negativa y que es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, estas propiedades de simetría las estudiaremos con detalles más adelante. ■

No hay una técnica para construir una tabla para graficar una función. Lo que se hace es tomar algunos valores de $x$ suficientemente espaciados (o juntos) para darnos una idea de su forma.

**Ejemplo 2.7** *Trazar la gráfica de la función* $f(x) = \sqrt{x}$.

**Solución.** Nótese que si $x < 0$, no tiene sentido la expresión $\sqrt{x}$ (ver la Sección 15.3 en el Apéndice), por lo tanto $D(f) = [0, \infty)$. Construimos la tabla de abajo y luego graficamos

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 2.645 | 3 | 3.316 | 3.741 | 4 |

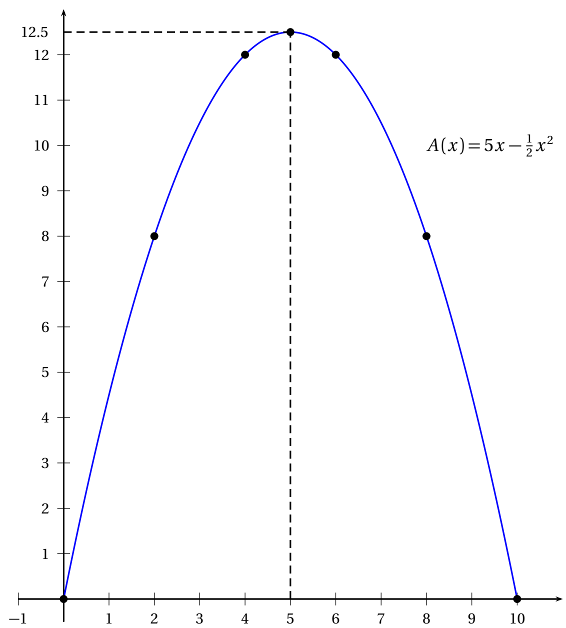



De la gráfica se puede apreciar que la imagen de $f$ es $[0, \infty)$. ■

**Ejemplo 2.8** *Trazar la gráfica de la función* $A(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, 10]$.

**Solución.** Como antes, consideremos una tabla para hacer la gráfica

| $x$ | $A(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 8 |
| 4 | 12 |
| 5 | 12.5 |
| 6 | 12 |
| 8 | 8 |
| 10 | 0 |




Con referencia al Ejemplo 2.3, de la gráfica anterior podemos apreciar que se obtiene el área máxima de 12.5 km$^2$ cuando el lado del terreno vale 5 km. Más adelante veremos un método analítico para encontrar este valor (ver el Teorema 9.3). ■

**Ejercicio 2.2** *Trazar la gráfica de las siguientes funciones:*

$$(a)\ 21x^2-10x+13,\quad (b)\ 6x^2-7x+2,\quad (c)\ x^4-2x^2+1,\quad (d)\ 4x^2-13x-12.$$

**Ejercicio 2.3** *Trazar la gráfica de las siguientes funciones:*

$$(a)\ h(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\in(-1,1],\\ x+2, & x\in(1,2],\\ x+4, & x\in(-3,-1),\end{cases}\qquad (b)\ f(x)=\frac{18x-6}{6x^2+13x-5}.$$

*Encontrar sus dominios y sus rangos.*

## 2.2. Igualdad de funciones

El objetivo es trabajar con funciones, por lo tanto un primer paso es saber cuándo dos de ellas son iguales. Esto se precisa enseguida.

**Definición 2.2** *Dos funciones $f : X_1 \to \mathbb{R}$ y $g : X_2 \to \mathbb{R}$ son iguales si $X_1 = X_2$ y $f(x)=g(x)$, para cada $x\in X_1 = X_2$.*

En palabras, decimos que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y toman los mismos valores.

**Ejemplo 2.9** *Verificar que las funciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=\sqrt{x^2}$ son iguales.*

**Solución.** Tenemos que $D(f)=\mathbb{R}=D(g)$. Recordemos (ver la Sección 15.3 en el Apéndice) que la raíz cuadrada positiva de un número real $b>0$, es aquel número real $a>0$ tal que

$$a^2=b.$$

Al número real $a$ se le llama raíz cuadrada positiva de $b$ y se denota por $\sqrt{b}$. Así, si $x\geq 0$, tenemos que $\sqrt{x^2}=x$. Pero si $x<0$, entonces $-x>0$ y

$$(-x)^2=(-1)^2x^2=x^2,$$

por lo tanto $\sqrt{x^2}=-x$, recuerde que buscamos una raíz cuadrada positiva de $x^2$. En resumen

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0,\end{cases} = |x|.$$

Por ende, $f$ y $g$ son iguales. ■

**Ejercicio 2.4** *Determinar el dominio y la imagen de las funciones*

$$(a)\quad f(x)=\sqrt[3]{x},\qquad (b)\quad g(x)=\sqrt[4]{x}.$$

*Trazar sus gráficas. Verificar si son iguales las funciones $(f(x))^3$, $(g(x))^4$ y $h(x)$, donde $h(x)=x$.*

**Ejemplo 2.10** *Trazar las gráficas de las funciones*

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \qquad g(x)=x+1.$$

*Además, verificar si son iguales.*

**Solución.** Consideremos la siguiente tabla:

| $x$ | $-5$ | $-2$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | $-1$ | No definida | 4 | 6 |
| $g(x)$ | $-4$ | $-1$ | 2 | 4 | 6 |

Con ella graficamos las funciones $f$, $g$ y se puede observar que casi coinciden, salvo en un punto. En efecto, notamos que

$$f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0} \quad \text{y} \quad g(1)=1+1=2, \tag{2.2}$$

por lo tanto, $D\left(f\right)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y $D\left(g\right)=\mathbb{R}$. Por ende, las funciones $f$ y $g$ no son iguales. Usando que $x^2-1$ es una diferencia de cuadrados (ver la Sección 15.5 en el Apéndice), nos queda

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1. \tag{2.3}$$

De esto se podría concluir que $f=g$. Sin embargo, el error ocurre cuando $x=1$, pues en este caso en (2.3) hay una división por cero, como se ve en la primera expresión de (2.2). ■

**Definición 2.3** *Una función $f: X\to\mathbb{R}$ se dice*

$(a)$ *par si $f(-x)=f(x), \quad \forall x\in X$,*

$(b)$ *impar si $f(-x)=-f(x), \quad \forall x\in X$.*

**Ejercicio 2.5** *Sea $f(x)=2x^8-5x^4+x^2$. Calcular los siguientes valores*

$$(a)\ f(1), \quad (b)\ f(-1), \quad (c)\ \frac{f(h-1)-f(1)}{h}, \quad (d)\ \frac{f(h+1)-f(-1)}{h}.$$

Si $f$ es una función par y $(x,f(x))\in G(f)$, entonces

$$(-x,f(x))=(-x,f(-x))\in G(f).$$

Esto significa que dado un punto $(x,y)$ en la gráfica, entonces $(-x,y)$ también está en la gráfica. Así, las funciones pares son simétricas con respecto al eje vertical (eje $y$); por consecuencia, para obtener su gráfica bastará con trazar la gráfica en un lado del plano cartesiano, la otra parte se obtiene por reflexión con respecto al eje vertical.

Por otra parte, si $f$ es impar y $(x, f(x)) \in G(f)$, entonces

$$-(x, f(x)) = (-x, -f(x)) = (-x, f(-x)) \in G(f). \tag{2.4}$$

Este tipo de simetría se llama simetría con respecto al origen y significa que si sabemos que $(x, y) \in G$, entonces $-(x, y) \in G$. En este caso también es suficiente con trazar la gráfica en una parte del plano. De (2.4) vemos que en este caso se necesitan dos reflexiones con respecto a los ejes, la primera reflexión es con respecto al eje $x$ y la segunda reflexión con respecto al eje $y$.

**Ejercicio 2.6** *Determinar si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas:*

$$(a)\ f(x) = x^7, \quad (c)\ k(r) = r^4 - 1, \quad (e)\ g(x) = x(x-1),$$
$$(b)\ f(s) = s + \frac{1}{s}, \quad (d)\ g(t) = t(t^2 - 1), \quad (f)\ f(u) = \left(\sqrt[4]{16 - u^4}\right)^7.$$

**Ejemplo 2.11** *Determinar si las funciones*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3,$$

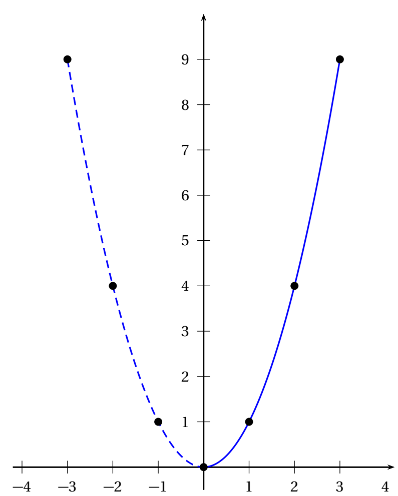
*son pares o impares y trazar sus gráficas.*

**Solución.** Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x),$$
$$g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -g(x).$$

Así, $f$ es una función par y $g$ es una función impar. Para determinar sus gráficas basta trabajar en la mitad del plano. Para la función $f$, consideremos la tabla:

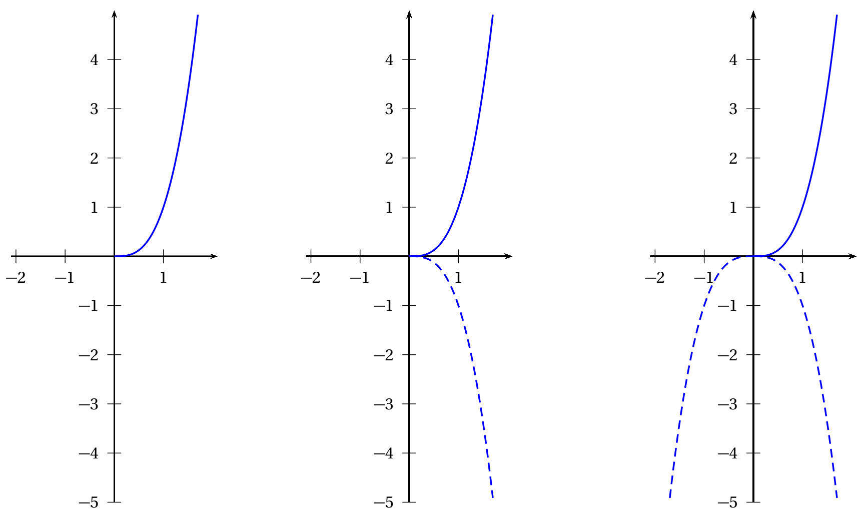
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |




La otra mitad de la gráfica de $f$ se obtiene reflejando la gráfica ya obtenida en el eje $y$. Análogamente, consideramos la tabla:

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 1 | 27 | 125 |

para trazar la gráfica de $g$ en el primer cuadrante. Una vez hecho esto, el segundo paso es reflejar la gráfica obtenida con respecto al eje $x$ y luego reflejar la gráfica con respecto al eje $y$, como se indica enseguida:




Nótese la relación que existe entre los puntos $(x, y)$ y los puntos $-(x, y)$. ∎

**Ejercicio 2.7** *De las siguientes funciones trazar su gráfica, encontrar su dominio y su rango, además determinar si son pares o impares:*

$$(a)\ f(x)=4-x^2, \quad (c)\ f(x)=-\frac{1}{(x-4)^2},$$

$$(b)\ f(x)=\frac{x}{|x|}, \quad (d)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1-x}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1. \end{cases}$$

## 2.3. Funciones inyectivas y sobres

**Definición 2.4** *Sea $f: X \to Y$ una función.*

$(a)$ *$f$ se llama inyectiva (o uno a uno) si $f(x)=f(y)$, implica $x=y$.*

$(b)$ *$f$ se llama sobre (o sobreyectiva) si $R(f)=Y$, es decir, para cada $y\in Y$ existe $x\in X$ tal que $f(x)=y$.*

En general supondremos que $Y=\mathbb{R}$.

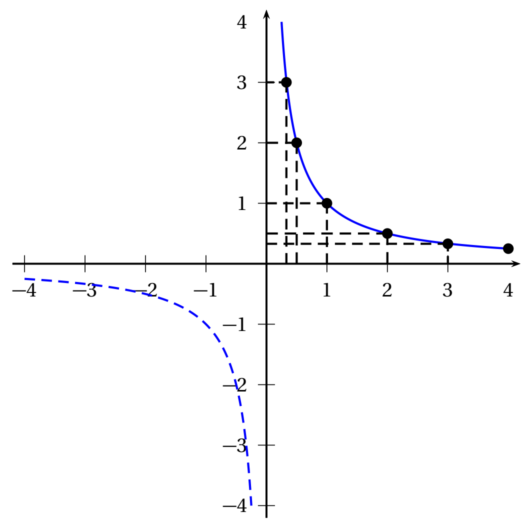
**Ejemplo 2.12** *Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Encontrar el dominio de $f$ y trazar su gráfica. Además, ver si $f$ es par, impar, sobre o inyectiva.*

**Solución.** Nótese que la regla de correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su inverso multiplicativo $x^{-1}$, $x \mapsto x^{-1}$, tiene sentido para cada $x \in \mathbb{R}$ excepto para $x = 0$, por lo tanto, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

es decir, $f$ es una función impar. En consecuencia bastará con trazar la mitad de la gráfica de $f$. Para esto consideramos la tabla

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| $1/3$ | $3$ |
| $1/2$ | $2$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $1/2$ |
| $3$ | $1/3$ |




La parte punteada se obtiene por simetría como en el Ejemplo 2.11. Nótese que no hay un punto $x$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x^{-1} = 0$. Así $f : D(f) \to \mathbb{R}$ no es sobre, pues 0 no es la imagen de ningún punto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por otra parte, supongamos que $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y además

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y.$$

Así, $f$ es una función inyectiva. ■

Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ podemos seguir el siguiente método. De manera imaginaria trazamos líneas paralelas al eje $x$. Tenemos los siguientes casos:

(a) Si las líneas cruzan una vez la gráfica, entonces la función es inyectiva.

(b) Si las líneas cruzan más de una vez la gráfica, entonces la función no es inyectiva.

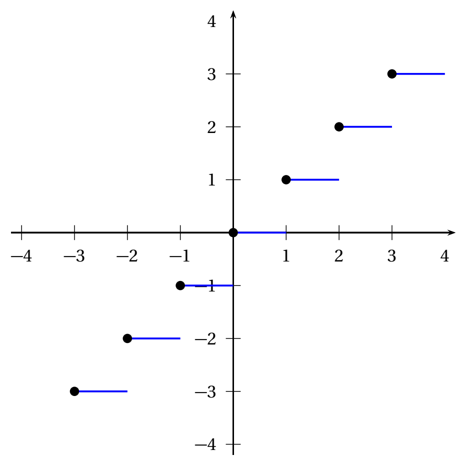
(c) Si las líneas no cruzan la gráfica, entonces la función no es sobre (es decir, su imagen no es $\mathbb{R}$).

En el ejemplo anterior, la línea que pasa por el eje $x$ no cruza la gráfica, por lo tanto la función no es sobre.

**Ejemplo 2.13** *Para cada $x \in \mathbb{R}$ le asignamos el mayor entero menor o igual a $x$. Este valor lo denotamos por $[\![x]\!]$. Trazar la gráfica de $f$ y discutir sus propiedades.*

**Solución.** Consideremos la siguiente tabla:

| $x$ | -2 | -1.5 | -1.3 | -1 | -0.5 | -0.3 | 0 | 0.5 | 0.8 | 1 | 1.5 | 1.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[\![x]\!]$ | -2 | -2 | -2 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |




De la gráfica observamos que al trazar líneas rectas, paralelas al eje $x$, ocurre:

(a) La línea recta con $y = 1.5$ no corta la gráfica, por lo tanto, $f$ no es sobre.

(b) La línea recta con $y = 1$ corta la gráfica más de una vez, por lo tanto $f$ no es inyectiva.

Usando, por ejemplo, las evaluaciones

$$[\![2.5]\!] = 2 \quad \text{y} \quad [\![-2.5]\!] = -3,$$

deducimos que la función no es par ni impar. ■

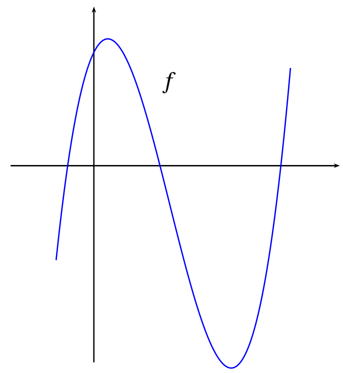
**Ejercicio 2.8** *Determinar si las siguientes funciones son inyectivas o sobre y trazar su gráfica*

$$(a)\ f(x) = x + [\![x]\!], \quad (c)\ g(x) = x - [\![x]\!],$$
$$(b)\ h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \quad (d)\ k(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}.$$

*En cada caso hay que especificar quién es el dominio y el rango de la función.*

## 2.4. Desplazamiento de la gráfica de una función

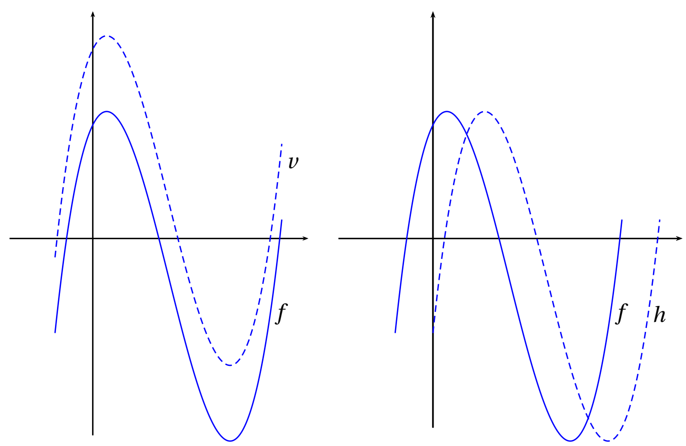
Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función cuya gráfica tiene la forma




Sea $c$ un número real dado. Ahora, consideremos las siguientes funciones

$$v(x) = f(x) + c,\ x \in X,$$
$$h(x) = f(x + c),\ x + c \in X.$$

Cuando $c > 0$ la gráfica de la función $v$ resulta de desplazar $c$ unidades verticalmente hacia arriba la gráfica de $f$, y la gráfica de la función $h$ se obtiene desplazando $c$ unidades horizontalmente hacia la izquierda la gráfica de la función $f$, como se aprecia a continuación:




**Definición 2.5** *Las gráficas de las funciones $v$ y $h$ se llaman desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal, respectivamente, de la gráfica de la función $f$.*

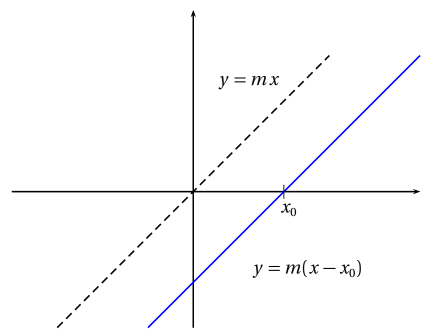
Si $c < 0$, entonces la gráfica de las funciones $v$ y $h$ se obtienen desplazando verticalmente hacia abajo y desplaza horizontalmente hacia la derecha la gráfica de $f$, $c$ unidades, respectivamente. Nótese que $D(v) = D(f)$ y cambia el rango. Sin embargo, en el caso de $h$ cambia su dominio, ahora necesitamos que $x + c \in D(f) = X$. Por lo tanto, $x \in D(h)$ si y sólo si existe un $z \in D(f)$ tal que $x = z - c$. Si $D(f)$ es un intervalo, entonces $D(h)$ es un intervalo desplazado. Con respecto a la imagen o rango de $h$ se tiene que, $R(h) = R(f)$.

**Ejemplo 2.14** *Trazar la gráfica de la línea recta* $y = mx + y_0 - mx_0$.

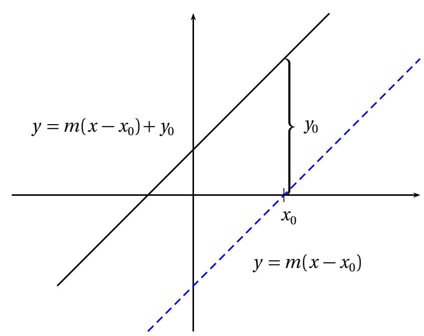
**Solución.** Es conveniente escribir la función así

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Dibujemos primero la línea recta $y = mx$, luego la trasladamos horizontalmente a la derecha $x_0$ unidades (si $x_0 > 0$), para obtener la gráfica de $y = m(x - x_0)$




Enseguida, traslademos verticalmente $y_0$ unidades hacia arriba (si $y_0 > 0$) la gráfica de $y = m(x - x_0)$ para obtener:




Así hemos obtenido la gráfica de una línea recta que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ y con pendiente $m$, ver (2.1). ∎

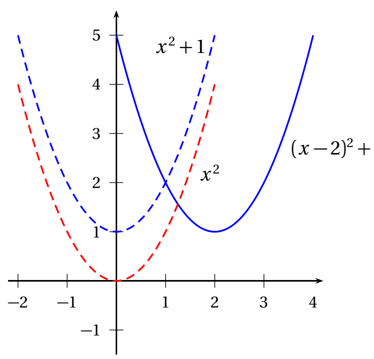
**Ejercicio 2.9** *Sea $f(x) = x^2$. Trazar las gráficas de las funciones (a) $f(x)$, (b) $f(x)+1$, (c) $f(x)-1$, (d) $f(x+1)$ y (f) $f(x-1)$.*

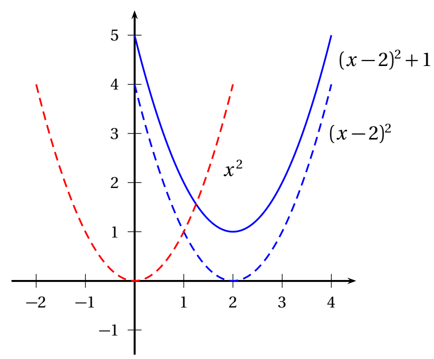
**Ejemplo 2.15** *Trazar la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.*

**Solución.** Completando el cuadrado (ver [9] para recordar este procedimiento) tenemos que

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1.$$

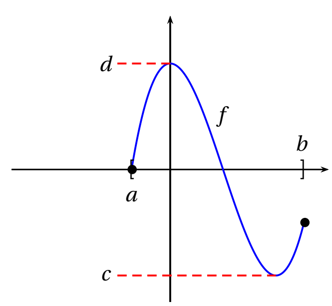
De ello es fácil hacer la gráfica de $f$, haciendo los desplazamientos respectivos:




En la primera figura desplazamos 1 unidad verticalmente hacia arriba la gráfica de $f(x) = x^2$, obteniendo $x^2+1$, luego la desplazamos horizontalmente 2 unidades a la derecha. La segunda figura nos indica que obtenemos lo mismo si primero desplazamos horizontalmente la gráfica de $f(x) = x^2$, 2 unidades a la derecha, obteniendo $(x-2)^2$ y luego la desplazamos verticalmente 1 unidad hacia arriba, resultando $(x-2)^2+1$. ■

**Ejercicio 2.10** *En la figura se muestra la gráfica de una función $f$:*




*Trazar la gráfica de las funciones*

$$(a)\ f(x-1),\quad (b)\ f(x)+1,\quad (c)\ f(x-2)+2,\quad (d)\ f(x+2)-2.$$

*¿Quiénes son sus dominios y sus rangos?*

**Ejercicio 2.11** *Trazar la gráfica de la función* $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 25$*, usando traslaciones.*

**Ejercicio 2.12** *Sea* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$*. Determinar el dominio y rango de las funciones*

$$(a)\ f(x), \quad (b)\ v(x) = f(x) + 3, \quad (c)\ h(x) = f(x-1).$$

*Trazar también su gráfica.*

**Ejercicio 2.13** *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*. Verificar las siguientes propiedades del valor absoluto:*

$$(a)\ |ab| = |a|\,|b|, \quad (c)\ -|a| \le a \le |a|,$$
$$(b)\ |a+b| \le |a| + |b|, \quad (d)\ \big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a-b|.$$

*Además, si* $c \ge 0$*, entonces*

$$(e)\ |a| \le c \text{ si y sólo si } -c \le a \le c.$$

# Capítulo 3

# Construcción de nuevas funciones

En este capítulo daremos algunos métodos para construir nuevas funciones a partir de otras ya dadas. A saber las operaciones aritméticas y la composición de funciones. Introduciremos también, de una manera intuitiva, el concepto de función trigonométrica y discutiremos algunas de sus propiedades básicas.

## 3.1. Operaciones aritméticas de funciones

Si $x, y$ son números reales ($x, y \in \mathbb{R}$), sabemos que podemos sumarlos ($x+y$), restarlos ($x-y$), multiplicarlos ($xy$) y dividirlos ($x/y$, cuando $y \neq 0$). Estas operaciones básicas se llaman operaciones aritméticas de los números reales. Si $f, g$ son funciones, la idea es precisar a continuación las operaciones aritméticas análogas a las de los números reales. De esta manera, dadas las funciones $f, g$ construiremos nuevas funciones $f+g$, $f-g$, $fg$ y $f/g$.

**Definición 3.1** *Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Para cada $x \in D(f) \cap D(g)$, definimos*

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \textit{(la suma de f más g)}\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x), \quad \textit{(la resta de f menos g)}\\
(fg)(x) &= f(x)g(x), \quad \textit{(la multiplicación de f por g)}
\end{aligned}$$

*y si $g(x) \neq 0$, entonces*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \textit{(la división de f entre g).}$$

Así, el dominio de $f+g$, $f-g$ y $fg$ es $D(f)\cap D(g)$ y el dominio de $f/g$ es $D(f)\cap D(g)\cap \left\{x \in D(g) : g(x) \neq 0\right\}$. En ocasiones es más conveniente encontrar el conjunto $\{x \in D(g) : g(x) = 0\}$ y usar que

$$\{x \in D(g) : g(x) \neq 0\} = D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}.$$

**Ejemplo 3.1** *Sean $f(x) = x - 1/x$, $g(x) = 1 + 1/x$. Determinar las funciones $f + g$, $f - g$, $fg$ y $f/g$.*

**Solución.** Si $x \neq 0$, entonces las operaciones $x - 1/x$, $1 + 1/x$ están bien definidas. Por ende $D(f) = D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Así

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + x, \qquad (3.1) \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
&= \left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -1 + x - \frac{2}{x}, \\
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
&= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\{x \in D(g) : g(x) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1 + \frac{1}{x} = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} = -1\right\} = \{-1\},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{f}{g}\right) &= D(f) \cap D(g) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\} \\
&= (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}) \\
&= \mathbb{R} \setminus \{0, -1\},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1 \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Obteniendo lo deseado. ■

Cuando se trabaja con operaciones de funciones hay que encontrar el dominio antes de realizar las operaciones algebraicas. Nótese que en el ejemplo anterior vimos que $D(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero de (3.1) podemos deducir, erróneamente, que el dominio de $f+g$ es $\mathbb{R}$. Análogamente, sabemos que $D(f/g)=\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, pero al realizar las operaciones algebraicas en (3.2) podemos deducir, falsamente, que el dominio es $\mathbb{R}$.

Así como podemos sumar, restar, multiplicar o dividir números reales un número finito de veces, lo mismo podemos hacerlo con las funciones. Veamos un ejemplo para aclarar el concepto.

**Ejemplo 3.2** *Sean $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$, $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Encontrar las funciones $fgh$ y $(f/g)/h$.*

**Solución.** Primero notemos que

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\},\ D(g)=\mathbb{R},\ \left\{x\in D(g): g(x)=0\right\}=\{0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} D(fg) &= D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ D(f/g) &= D(f)\cap D(g)\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})=\mathbb{R}\setminus\{0\}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x)g(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)x=-1+x^2,\\ (f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\frac{x^2-1}{x^2}. \end{aligned}$$

Además $D(h)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y

$$\{x\in D(h): h(x)=0\}=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:\frac{x+1}{x-1}=0\right\}=\{-1\},$$

entonces

$$\begin{aligned} D((fg)h) &= D(fg)\cap D(h)\\ &= (\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap(\mathbb{R}\setminus\{1\})\\ &= \mathbb{R}\setminus\{0,1\},\\ D((f/g)/h) &= D(f/g)\cap D(h)\cap\{x\in D(h): h(x)\neq 0\}\\ &= (\mathbb{R}\setminus\{0,1\})\cap(\mathbb{R}\setminus\{-1,1\})\\ &= \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} ((fg)h)(x) &= (fg)(x)h(x)\\ &= (-1+x^2)\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)(x+1)}{x-1}=(x+1)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((f/g)/h)(x) &= \frac{(f/g)(x)}{h(x)} \\
&= \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{x^2(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x^2} = \left(1-\frac{1}{x}\right)^2.
\end{aligned}
$$

De este modo se han obtenido las funciones deseadas. ■

Como era de esperar, al igual que en los números reales, las operaciones aritméticas con funciones son asociativas y conmutativas.

**Ejercicio 3.1** *Encontrar* $f+g$, $f-g$, $fg$ *y* $f/g$, *donde*

$$
(a)\ f(x)=x-\frac{1}{x},\ \ g(x)=x+\frac{1}{2x},\quad (c)\ f(x)=5x-1,\ \ g(x)=\sqrt{x^2-4},
$$

$$
(b)\ f(x)=x,\ \ g(x)=\frac{1}{x},\quad (d)\ f(x)=2x^3+3x+1,\ \ g(x)=7x^4-x^3+4x.
$$

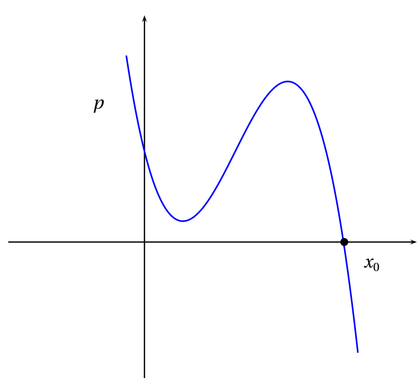
Si sumamos las funciones

$$g_i(x)=a_i x^i,$$

$a_i \in \mathbb{R}$, cuando $i=0,1,\ldots,n$, obtenemos la función

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

recuerde que $x^0=1$. Si $a_n \neq 0$, decimos que $p$ es un polinomio de grado $n$ y $a_n$ se llama coeficiente principal. El número $a_0$ se llama término constante (o independiente ). Nótese que $D(p)=\mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un cero o una raíz de $p$ si $p(x_0)=0$. Es decir, un número $x_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz de un polinomio $p$ si la gráfica de $p$ cruza el eje $x$ en el punto $x_0$:




Algunos polinomios tienen un nombre especial:

- $p(x)=a_0$, función constante.

- $p(x)=a_0$, función identidad.
- $p(x)=a_0+a_1x$, función lineal.
- $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, función cuadrática.

**Ejercicio 3.2** *Verificar cuáles de las siguientes funciones son polinomios*

$$\begin{array}{llll} (a) & f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}, & (c) & f(x)=\sqrt[4]{(x^2-1)^4}, \\ (b) & f(x)=\sqrt[3]{(x^4-1)^3}, & (d) & f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}. \end{array}$$

*Indicar, cuando sea un polinomio, cuál es su grado.*

**Ejercicio 3.3** *Determinar las raíces de la función (a) lineal y (b) cuadrática. (Para resolver una ecuación cuadrática se suguiere completar el cuadrado, ver por ejemplo la página 56 en [9].)*

Decimos que una función es racional si es el cociente de dos polinomios, es decir, si es de la forma
$$\frac{f(x)}{g(x)},$$
con $f,g$ polinomios. Nótese que el dominio de $f/g$ será $\mathbb{R}\backslash\{\text{ceros de g}\}$. Por otra parte, una función se llama algebraica si es suma, resta, producto, cociente o raíz de polinomios. Una función que no es algebraica se llama trascendente.

**Ejemplo 3.3** *Algunos ejemplos de los diferentes tipos de funciones son:*

$(a)$ $f(x)=3x^5-5x^4-1$, *es un polinomio de grado* $5$,

$(b)$ $g(x)=\dfrac{4x^3}{3x-1}$, *es una función racional,*

$(c)$ $p(x)=\sqrt{3x+1}-\dfrac{9}{4x-1}$, *es una función algebraica,*

$(d)$ $q(x)=\operatorname{sen}(x)+e^{-x}$, *es una función trascendente.*

Más adelante, en este capítulo, estudiaremos otras funciones trascendentes, las funciones trigonométricas.

**Ejercicio 3.4** *(a) ¿Existen dos polinomios $f$ y $g$ tales que la ecuación*

$$\begin{array}{rcl} xf(x)+g(x) & = & 3, \\ xf(x)-g(x) & = & x^2, \end{array}$$

*se cumpla para cada $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$?. (b) ¿Qué pasa si ahora $f$ y $g$ son funciones racionales?*

## 3.2. Composición de funciones

Un método muy importante para construir nuevas funciones a partir de dos ya dadas se llama composición de funciones. Este procedimiento no tiene un análogo en los números reales.

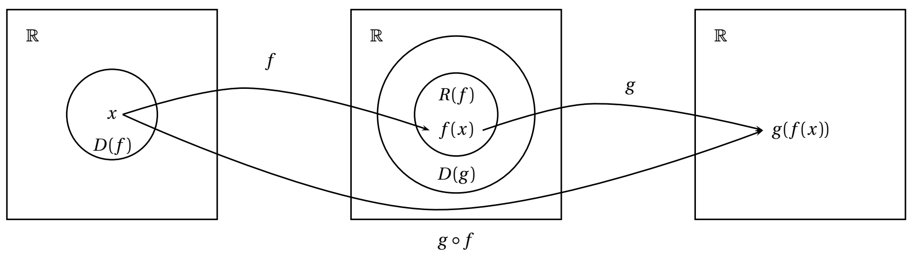
**Definición 3.2** *Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la función composición de $f$ con $g$ como $g \circ f : D(g \circ f) \to \mathbb{R}$,*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

*donde*

$$D(g \circ f) = \left\{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\right\}.$$

La composición de funciones la podemos interpretar geométricamente de la siguiente manera




Es importante señalar que el rango de $f$ debe estar contenido en el dominio de $g$, es decir, $R(f) \subset D(g)$, para que la composición tenga sentido.

Al realizar la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se suele poner $f(x)$ en lugar de $x$ en la definición de $g$ y después sustituir el valor de $f(x)$.

**Ejemplo 3.4** *Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.*

**Solución.** Nótese que $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R}_+$, entonces

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \left\{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}_+\right\} = \mathbb{R}, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= \left\{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_+, \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x. \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior conviene tener presente el Ejemplo 2.9 donde verificamos que $\sqrt{x^2} = |x|$. ∎

El ejemplo precedente nos muestra que en general $f \circ g$ no es lo mismo que $g \circ f$. Sin embargo, siempre se cumple $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

**Ejercicio 3.5** *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x^m$, $g(x) = x^{1/n}$, estudiar $f \circ g$, $g \circ f$.*

**Ejemplo 3.5** *Sean $f(x) = x^4 - 1$, $g(x) = \sqrt[4]{x-15}$. Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.*

**Solución.** Notemos primero que $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = [15, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned}
D(f \circ g) &= \left\{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\right\} \\
&= \left\{x \in [15, \infty) : \sqrt[4]{x-15} \in \mathbb{R}\right\} = [15, \infty), \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (g(x))^4 - 1 \\
&= (\sqrt[4]{x-15})^4 - 1 = (x-15) - 1 = x - 16. \\
D(g \circ f) &= \left\{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 \in [15, \infty)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 \geq 15\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 16\right\} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty), \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt[4]{f(x) - 15} \\
&= \sqrt[4]{(x^4 - 1) - 15} = \sqrt[4]{x^4 - 16}.
\end{aligned}$$

En el cálculo de $D(g \circ f)$ hemos usado la definición de raíz cuarta. ■

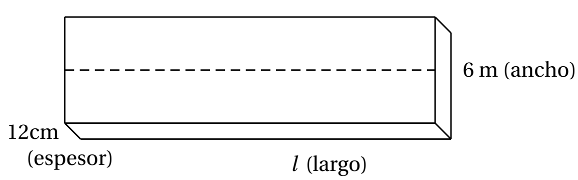
**Ejercicio 3.6** *Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$ donde*

$$(a)\ f(x) = x^2 + 1,\ \ g(x) = x^5 + 3x - 1, \quad (b)\ f(x) = \frac{1}{g(x)},\ \ g(x) = x^2.$$

Como veremos adelante, la composición de funciones ocurre de manera natural en problemas reales.

**Ejemplo 3.6** *Se desea construir un tramo lineal de una calle de 6 m de ancho de modo que el concreto tenga un espesor de 12 cm. Para esto se contrata un camión pipa que vierte concreto a 220 cm$^3$/seg. Expresar la longitud $l$ cubierta de concreto como función del tiempo. Si la calle mide 174 m de largo, ¿cuánto tiempo tardará la pipa en terminar la calle?*

**Solución.** Tenemos el siguiente esquema




A $t$ segundos se han vertido $(220)t$ cm$^3$ de concreto. Los cuales se han utilizado para cubrir $l(12)(600)$ cm$^3$ de la calle. Así

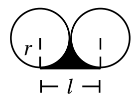
$$(220)t = l(12)(600) \Rightarrow l = \frac{220}{7,200} t \text{ cm}.$$

Por otra parte, si $l = 17,400$ cm, entonces

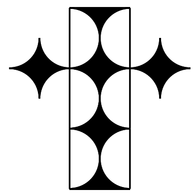
$$t = \frac{(17,400)(12)(600)}{220} = 569,454.5 \text{ seg.}$$

Para cubrir 174 m tomará aproximadamente 158 horas. ■

**Ejemplo 3.7** *Sea $A$ el área sombreada en la figura*

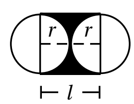



*y sea $C$ el área sombreada en la figura*



*Verificar que $C$ es función de $A$ y que ésta, a su vez, es función de $l$.*

**Solución.** Para determinar el valor de $A$ notamos que el área de interés está contenida en un rectángulo de base $l$ y ancho $2r$:




Además, el radio de los círculos es $l/2$. Por lo tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\text{Área de cuadrado} - \text{Área de un círculo}) \\ &= \frac{1}{2}(l^2 - \pi r^2) \\ A(l) &= \frac{1}{2}\left(l^2 - \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

De modo que, $C = 10A(l)$,

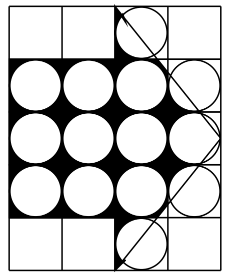
$$C(l) = 10\frac{l^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 5l^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Más aún, observamos que $l$ es función de $r$, $l(r) = 2r$. ■

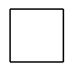
El área $C$ del ejemplo anterior es complicada y la dividimos en áreas del tipo $A$, que son más fáciles de calcular, $C = (f \circ A)(l)$, $f(x) = 10x$. De esto aprendemos que la composición de funciones nos permite descomponer una función de interés en funciones fáciles de trabajar. Una consecuencia de este hecho es la regla de la cadena para derivadas, por ejemplo.

**Ejercicio 3.7** *Se fabrican tubos cilíndricos de una hoja de cobre de* $l$ *m de largo y* 10 *cm de ancho. Expresar el volumen del cilindro en términos de lo largo de la hoja de cobre.*

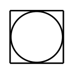
**Ejercicio 3.8** *Expresar el área sombreada en la flecha*



*(a) como función del área del cuadrado*

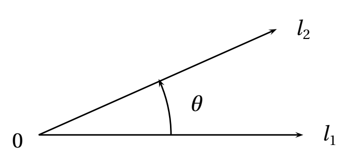


*(b) como función del área del círculo*



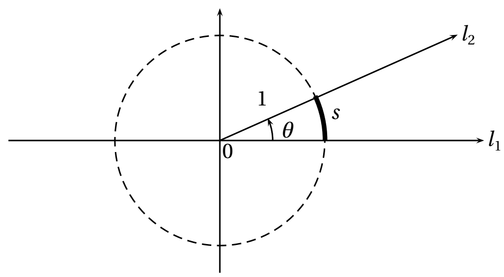
## 3.3. Funciones trigonométricas

En esta sección introducimos un caso especial de funciones trascendentes, a saber, las funciones trigonométricas. Iniciaremos con el concepto de ángulo. Para esto consideremos un segmento de línea recta, $l_1$, que inicia en el punto 0, y supongamos que lo hacemos girar, en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta llegar a una posición $l_2$, así obtenemos un ángulo $\theta$, que se ha formado entre la posición inicial de $l_1$ y la nueva posición en $l_2$, ver el dibujo



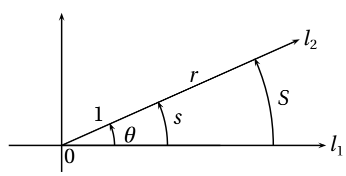

Si el recorrido se hace en sentido de las manecillas del reloj, entonces diremos que el ángulo es negativo. Las unidades en las que se miden los ángulos se llaman radianes.

Para definir la magnitud de un ángulo consideramos al plano cartesiano. Más precisamente, hagamos que 0 sea el origen $(0,0)$ y $l_1$ coincida con el eje $x$. Prolonguemos $l_2$, si es necesario, de modo que $l_2$, se intersecte con el círculo unitario (círculo de radio 1). Obtenemos algo así




La longitud del arco, $s$, del círculo unitario comprendida entre $l_1$ y $l_2$, indicará la magnitud del ángulo $\theta$. Más precisamente, diremos que el ángulo $\theta$ mide $s$ radianes, o bien que $\theta = s$ rad.

Supongamos un ángulo fijo, $\theta$, y prolonguemos $l_2$ hasta intersectar el círculo de radio $r$

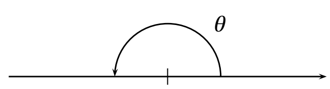



Para obtener la longitud del arco $S$, del círculo de radio $r$, aplicamos una regla de tres simple, es decir,

| radio | | longitud del arco |
|---|---|---|
| 1 | : | $\theta = s$ rad |
| $r$ | : | $S$ |

Por lo tanto, $1 \times S = r \times s$, es decir, $s = r\theta$, donde $\theta$ está dado en radianes.

Otra forma de medir los ángulos es con grados. Para esto basta suponer que un ángulo de la forma




mide $180^0$ grados. Por otra parte, esto representa la mitad del perímetro de un círculo unitario, $2\pi$. Por lo tanto, $s = (2\pi)/2$, es decir

$$180^0 = \theta = \pi \text{ rad.}$$

Los demás ángulos se pueden obtener usando la regla de tres simple. Por ejemplo, si $\theta = 45^0$, hacemos

$$\begin{array}{ccc} \text{grados} & & \text{radianes} \\ 180 & : & \pi \\ 45 & : & x \end{array}$$

Así, $180x = 45\pi$, lo que nos da, $x = \frac{45}{180}\pi = \frac{1}{4}\pi$. Es decir, $45^0$ grados es igual a $\pi/4$ radianes.

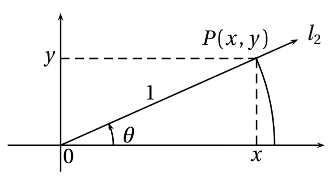
Ahora, si tenemos $\frac{3}{4}\pi$ radianes y queremos conocer a cuántos grados es igual hacemos

$$\begin{array}{ccc} \text{radianes} & & \text{grados} \\ \pi & : & 180 \\ \dfrac{3}{4}\pi & : & x \end{array}$$

Por lo tanto $\frac{3}{4}\pi$ son $135^0$ grados.

Un ángulo puede ser mayor que $360^0$ $(2\pi)$, esto significa que se ha dado más de una vuelta alrededor del origen.

Sea $\theta$ un ángulo y sea $P(x, y)$ el punto de intersección del segmento $l_2$ con el círculo unitario




Se definen las funciones trigonométricas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta) &= y \ \text{ (seno)}, \\
\cos(\theta) &= x \ \text{ (coseno)}, \\
\tan(\theta) &= \frac{y}{x}, \ x \neq 0 \ \text{ (tangente)}, \\
\csc(\theta) &= \frac{1}{y}, \ y \neq 0 \ \text{ (cosecante)}, \\
\sec(\theta) &= \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \ \text{ (secante)}, \\
\operatorname{ctg}(\theta) &= \frac{x}{y}, \ y \neq 0 \ \text{ (cotangente)}.
\end{aligned}$$

De la definición anterior es inmediato que

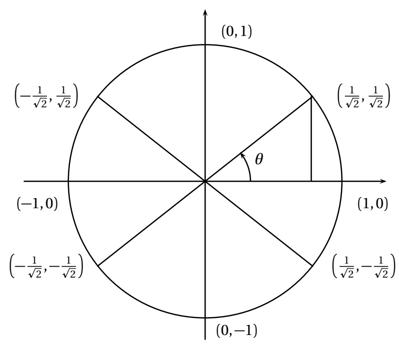
$$|\operatorname{sen}\,\theta| \leq 1, \ \ |\cos\ \theta| \leq 1, \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, suponga que un ángulo $\theta$ corresponde a un punto $P(x,y)$, entonces es claro que se obtiene el mismo punto $P(x,y)$ al dar $n$ vueltas completas alrededor del origen. Puesto que en cada vuelta se ha recorrido un ángulo de $2\pi$, entonces la magnitud del ángulo correspondiente será de $\theta+(2\pi)n,\ n\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto, si $f$ es una función trigonométrica, entonces

$$f(\theta)=f(\theta+2\pi n),\ \ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Decimos que las funciones trigonométricas son periódicas, de periodo $2\pi$.

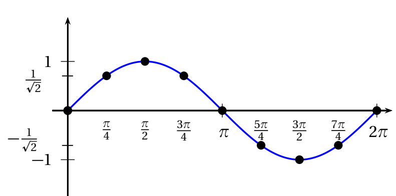
Con el propósito de esbozar la gráfica de las funciones trigonométricas consideremos lo siguiente:



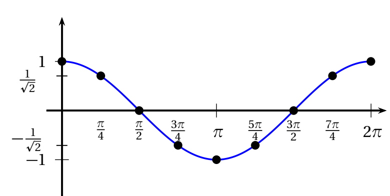

De esto deducimos los siguientes valores de las funciones trigonométricas:

| $\theta$ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ | $5\pi/4$ | $3\pi/2$ | $7\pi/4$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $\theta$ | 0 | $1/\sqrt{2}$ | 1 | $1/\sqrt{2}$ | 0 | $-1/\sqrt{2}$ | -1 | $-1/\sqrt{2}$ | 0 |
| cos $\theta$ | 1 | $1/\sqrt{2}$ | 0 | $-1/\sqrt{2}$ | -1 | $-1/\sqrt{2}$ | 0 | $1/\sqrt{2}$ | 1 |
| tan $\theta$ | 0 | 1 | $\infty$ | $-1$ | 0 | 1 | $-\infty$ | $-1$ | 0 |
| csc $\theta$ | $\infty$ | $\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $-1$ | $-\sqrt{2}$ | $\infty$ |
| sec $\theta$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\infty$ | $-\sqrt{2}$ | -1 | $-\sqrt{2}$ | $\infty$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| ctg$\theta$ | $\infty$ | 1 | 0 | $-1$ | $-\infty$ | 1 | 0 | $-1$ | $\infty$ |

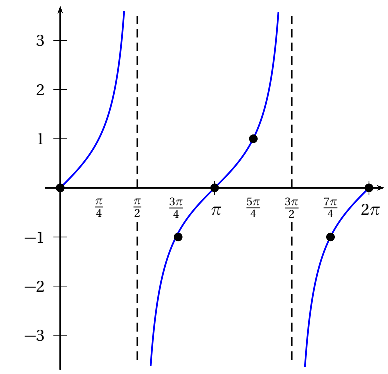
La división $\frac{1}{0}$ no está definida, aquí hemos tomado la convención de escribir esto como $\infty$. En la tabla podemos apreciar cómo inicia de nuevo el periodo en $2\pi$. De este modo obtenemos



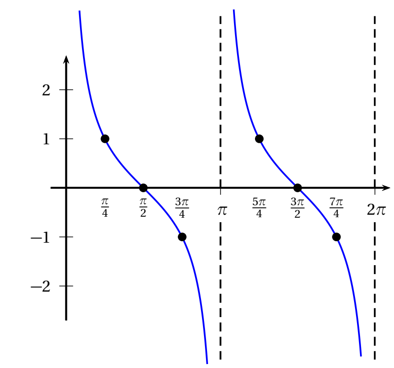
sen $\theta$



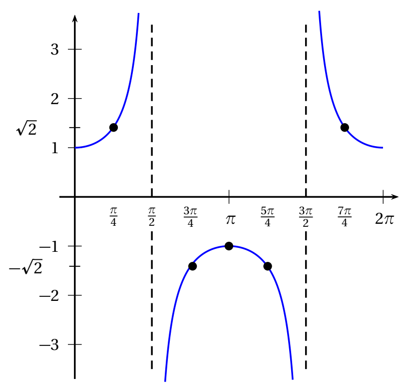
cos $\theta$



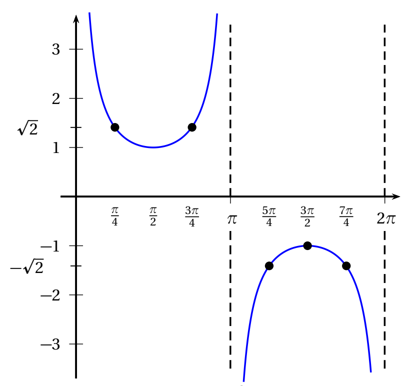

$\tan\theta$




$\cot\theta$

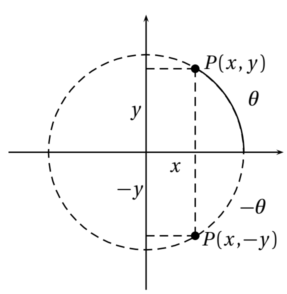



$\sec\theta$




$\csc\theta$

A continuación estudiaremos algunas identidades útiles (ver [7] para una amplia gama de éstas). Supongamos que $P(x,y)$ es el punto en el círculo unitario asociado al ángulo $0 \leq \theta < 2\pi$. Recordemos que $-\theta$ representa la longitud del arco, pero ahora en sentido de las manecillas del reloj, de modo que el punto asociado será $P(x,-y)$. Gráficamente lo podemos apreciar así



De esto deducimos que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \cos(-\theta) = \cos\,\theta,$$

es decir, la función seno es impar y la función coseno es par. Expresiones análogas para las otras funciones trigonométricas se pueden obtener usando las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, & \sec(\theta) &= \frac{1}{\cos(\theta)}, \\ \cot(\theta) &= \frac{1}{\tan(\theta)}, & \csc(\theta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}. \end{aligned}$$

De las relaciones

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}\ (x \neq 0), \quad 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}\ (y \neq 0),$$

deducimos que

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta), \quad 1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta). \tag{3.3}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\ \cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), \end{aligned}$$

cuya verificación puede consultarse en la Sección 15.8 del Apéndice.

**Ejemplo 3.8** *Encuentre la solución de*

$$2\cos^3(t) + \cos^2(t) - 2\cos(t) - 1 = 0,$$

*en* $[0, 2\pi,)$ *y darla también en grados.*

**Solución.** Haciendo $x = \cos(t)$, nos queda

$$2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

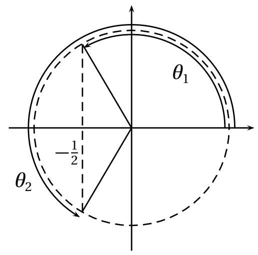
factorizando

$$0 = x^2(2x+1) - (2x+1) = (2x+1)(x^2-1) = (2x+1)(x+1)(x-1).$$

Por lo tanto, $x = -1,\ 1,\ -\frac{1}{2}$. Esto significa que $\cos(t) = -1$, $\cos(t) = 1$ y $\cos(t) = -\frac{1}{2}$. Ahora buscamos un valor en grados, de $t \in [0, 2\pi)$, tal que $\cos(t)$ nos dé el valor respectivo. Así vemos que

$$\cos(180^0) = -1 \ \text{ y } \ \cos(0^0) = 1.$$

Para calcular el valor de $t$ tal que $\cos(t) = -1/2$, hacemos




Por lo tanto, hay dos opciones de ángulo, $\theta_1$ y $\theta_2$. Por inspección deducimos que éstos son $\theta_1 = 120^0$ y $\theta_2 = 240^0$. ■

**Ejercicio 3.9** *Encuentre el cuadrante que contiene a $\theta$ suponiendo que*

$$(a)\ \operatorname{sen}(\theta) > 0,\ \cos(\theta) < 0, \qquad (c)\ \cos(\theta) > 0,\ \csc(\theta) < 0,$$
$$(b)\ \operatorname{sen}(\theta) < 0,\ \sec(\theta) > 0, \qquad (d)\ \tan(\theta) < 0,\ \cot(\theta) > 0.$$

**Ejercicio 3.10** *Convierta el valor dado a radianes o grados, según corresponda:*

$$(a)\ \frac{7\pi}{4}\,\text{rad},\ (b)\ \frac{3\pi}{4}\,\text{rad},\ (c)\ 165^0,\ (d)\ 75^0.$$

**Ejercicio 3.11** *Un ángulo $\theta$ abarca un arco de $80cm$ de longitud sobre una circunferencia de $2m$ de radio, ¿cuál es el valor de $\theta$ en radianes?*

**Ejercicio 3.12** *Verificar las siguientes identidades:*

$$(a)\ \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\cot(x) = \csc(x), \quad (c)\ 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1,$$
$$(b)\ \frac{\csc^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \cot^2(\theta), \quad (d)\ \frac{\tan(x)-\cot(x)}{\tan(x)+\cot(x)} = 2\operatorname{sen}^2(x) - 1.$$

**Ejercicio 3.13** *Calcular los siguientes valores (sin usar calculadora):*

$$(a)\ \cos\ 30^0, \quad (c)\ \operatorname{sen}\ \pi/6, \quad (e)\ \tan\ 150^0, \quad (g)\ \cot\ 5\pi/6,$$
$$(b)\ \sec\ 240^0, \quad (d)\ \csc\ 4\pi/3, \quad (f)\ \cos\ 120^0, \quad (h)\ \cos\ 240^0.$$

**Ejercicio 3.14** *Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones en* $[0, 2\pi)$

$$(a)\ \operatorname{sen}\theta + 2\cos^2\theta = 1, \quad (b)\ \operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}\ x.$$

**Ejercicio 3.15** *Trazar la gráfica de la función $f$ dada por:*

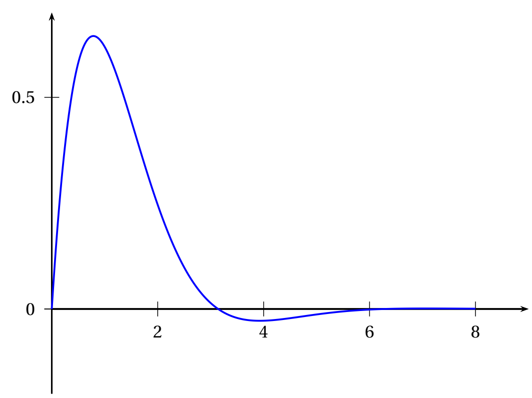
$$(a)\ f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 3, \quad (b)\ f(x) = 5 - \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right).$$

Hay muchos programas de cómputo para graficar funciones. A continuación damos algunos comandos utilizados por MatLab:

- Valor absoluto de $x = \text{abs}(x)$, seno de $x = \sin(x)$
- Coseno de $x = \cos(x)$, tangente de $x = \tan(x)$
- Exponencial de $x = \exp(x)$
- Logaritmo de base 10 de $x = \log(x)$
- Logaritmo de base $e$ (o natural) de $x = \ln(x)$
- Parte entera de $x = \text{round}(x)$
- Raíz cuadrada de $x = \text{sqrt}(x)$
- Potencia de $x$ a la $n = x \wedge n$ ($n$ real $> 0$).

**Ejemplo 3.9** *Graficar la función* $f(x) = 2e^{-x}\,\text{sen}(x)$ *en el intervalo* $[0,8]$.

**Solución.** Se introduce el siguiente código en MatLab:
>> $f =' 2 * \exp(-x) * \sin(x)'$; (se define la función);
>> fplot($f$,[0,8]) (se especifica el intervalo);
>> title($f$), xlabel($'x'$) (grafica la función)




Nótese lo conveniente de usar un programa de cómputo, ya que la función no es sencilla de graficar. ■

**Ejercicio 3.16** *Graficar las siguientes funciones*

$$(a)\ f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2,\ x \in [0,4], \quad (d)\ f(x) = 21x^8 - 10x^3 + 13x,\ \ x \in [-1,1],$$
$$(b)\ f(x) = (x+1)(x+3)(x+8),\ x \in [-5,2], \quad (e)\ f(x) = \sqrt{x^2},\ x \in [-4,4],$$
$$(c)\ f(x) = \text{sen}(\exp(\cos(\exp(\text{sen}^2(x^3))))),\ x \in [-3,3], \quad (f)\ f(x) = x^x,\ x \in [0.1,3].$$

**Ejercicio 3.17** *En cada caso, encuentre todos los* $x \in \mathbb{R}$ *que sean solución de la ecuación*

$$(a)\ \text{sen}(x) = -1, \quad (c)\ \text{sen}(x) = 1, \quad (e)\ \cos(x) = 0,$$
$$(b)\ \text{sen}(x) = 0, \quad (d)\ \cos(x) = -1, \quad (f)\ \cos(x) = 1.$$

# Capítulo 4

# Límites

Sin duda, el concepto de límite es uno de los objetos matemáticos fundamentales del cálculo. En este capítulo definimos dicho ente matemático e iniciamos el estudio de sus principales propiedades.

## 4.1. Definición de límite

Comenzamos introduciendo el concepto de límite de manera informal. Sea $f : D(f) \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto para el cual existe un intervalo abierto $I$ tal que $I \setminus \{x_0\} \subset D(f)$. Decimos que un número $L \in \mathbb{R}$ es el límite de $f$ en $x_0$, si los valores $f(x)$ se pueden aproximar a $L$, tanto como se quiera, aproximando los valores de $x$ a $x_0$ (con $x \neq x_0$). Este hecho se acostumbra denotar como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

y decimos que $f(x)$ tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $x_0$, o bien decimos que el límite de $f(x)$ es $L$ cuando $x$ tiende a $x_0$.

Es importante notar que la función $f$ no necesariamente está definida en $x_0$, es decir, $x_0$ no está en $D(f)$ necesariamente. Además, cuando el límite existe es único.

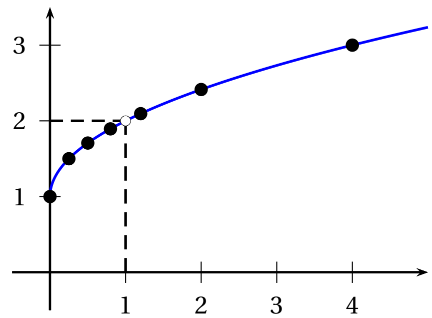
**Ejemplo 4.1** *Considere la función*

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \quad x \in [0,1) \cup (1,\infty).$$

*Estudiar* $\lim_{x \to 1} f(x)$.

**Solución.** Primero nótese que $1 \notin D(f) = [0,1) \cup (1,\infty)$. Hagamos una gráfica de $f$, para tratar de adivinar el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 1:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.25 | 1.5 |
| 0.5 | 1.707 |
| 0.8 | 1.894 |
| 0.9 | 1.948 |
| 0.95 | 1.974 |
| 1.05 | 2.024 |
| 1.1 | 2.048 |
| 1.2 | 2.095 |
| 2 | 2.414 |
| 4 | 3 |

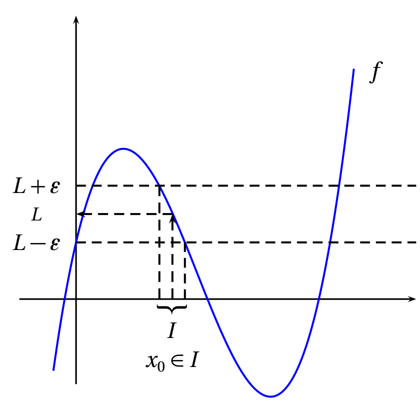



En la gráfica de arriba hagamos que los valores de $x$ se aproximen a 1, sin tomar el valor 1. De aquí observamos que el valor de la función se aproxima a 2 cuando $x$ se aproxima a 1. Por ende, inferimos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. ■

El concepto riguroso de límite es el siguiente.

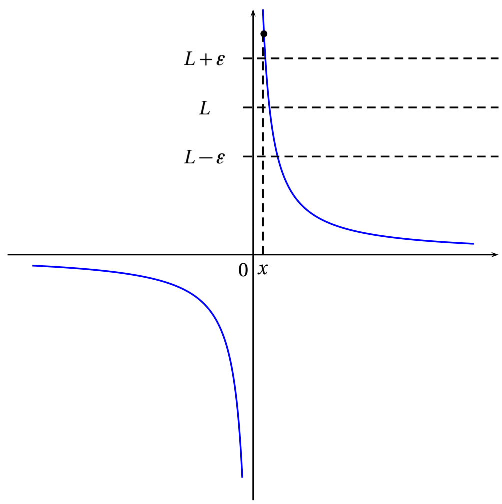
**Definición 4.1** *Un número $L$ es límite de $f(x)$ en $x_0$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in ((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}) \subset D(f)$, entonces $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.*

Graficamente este concepto lo podemos interpretar así: Un número $L$ es límite de $f(x)$ en $x_0$ si al trazar cualesquiera dos líneas $y = L+\varepsilon$, $y = L-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, existe un intervalo abierto $I$, que contiene a $x_0$, tal que $f(x)$ está entre las líneas $y = L+\varepsilon$, $y = L-\varepsilon$, para cada $x \in I$:




**Ejemplo 4.2** *Verificar que* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ *no existe.*

**Solución.** Si el límite $L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiese, entonces la gráfica de la función $\frac{1}{x}$ debería estar acotada cerca de 0, es decir entre las líneas $y = L+\varepsilon$, $y = L-\varepsilon$, para $x$ cercana a 0. Esto no es cierto, pues $\frac{1}{x}$ se hace arbitrariamente grande cuando $x$ se aproxima a 0. En efecto, de la gráfica




podemos apreciar que siempre hay al menos un $x$, cercano a 0, tal que $f(x)$ que se sale de las líneas $y = L+\varepsilon$, $y = L-\varepsilon$. ■

**Ejercicio 4.1** *Adivinar el valor de los siguientes límites:*

$$(a)\quad \lim_{x\to -2}(x^2+1), \qquad (b)\quad \lim_{t\to -1}\frac{t^2-1}{t+1}.$$

**Ejercicio 4.2** *Verificar si existen los siguientes límites, si existen, adivinar su valor:*

$$(a)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x^2+4x+3}, \qquad (b)\quad \lim_{h\to 2}\frac{(h+2)^2-4}{h}.$$

Ahora estudiaremos otro concepto, los límites unilaterales. Sea $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0, x_0+\delta) \subset D(f)$, para algún $\delta > 0$. Decimos que $L$ es el límite por la derecha (o por arriba) de $f$ en $x_0$ si podemos aproximar $f(x)$ a $L$ tanto como se quiera haciendo que $x \in (x_0, x_0+\delta)$ se aproxime a $x_0$. En este caso escribimos

$$L = \lim_{x\downarrow x_0} f(x), \quad \text{o bien} \quad L = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

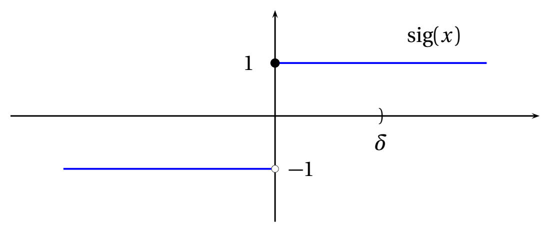
Análogamente se define el límite por la izquierda.

**Ejemplo 4.3** *Sea* $\mathrm{sig} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función signo definida por*

$$\mathrm{sig}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

*Estudiar* $\lim_{x\downarrow 0} \mathrm{sig}(x)$ *y* $\lim_{x\uparrow 0} \mathrm{sig}(x)$.

**Solución.** Consideremos la gráfica de la función signo:




Notamos que en cualquier intervalo de la forma $(0,\delta)$ la función $\operatorname{sig}(x)=1$, por lo tanto $\lim_{x\downarrow 0}\operatorname{sig}(x)=1$. Por otra parte, en cada intervalo de la forma $(-\delta,0)$ se tiene que $\operatorname{sig}(x)=-1$, por lo tanto $\lim_{x\uparrow 0}\operatorname{sig}(x)=-1$. ■

**Ejercicio 4.3** *Verificar que* $x\operatorname{sig}(x)=|x|$, *para cada* $x\in\mathbb{R}$.

**Ejercicio 4.4** *Encontrar los límites unilaterales en* 0 *de las funciones*

$$(a)\quad f(x)=\frac{|x|\operatorname{sig}(x)+x}{x},\qquad (b)\quad g(x)=\frac{|x|+x}{x}.$$

Los límites unilaterales no siempre existen; en efecto, la función $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límites unilaterales en 0 (ver el Ejemplo 4.12).

Es conveniente notar que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe si y sólo si los límites unilaterales $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$ existen y son iguales. Usando este criterio deducimos que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sig}(x)$ no existe, ver el Ejemplo 4.3

## 4.2. Propiedades de los límites

Algunos límites elementales son

- $\lim_{x\to a} C=C$, (límite de la función constante),
- $\lim_{x\to a} x=a$, (límite de la función identidad).

Tenemos también que si

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=M,$$

entonces

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=L\pm M,\quad \lim_{x\to a}(fg)(x)=LM,$$

además, si $M\neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{L}{M}.$$

Como consecuencia de esto obtenemos que si $p$ es un polinomio

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0} a_0+\lim_{x\to x_0} a_1x+\cdots+\lim_{x\to x_0} a_nx^n \\
&= \lim_{x\to x_0} a_0+\lim_{x\to x_0} a_1 \lim_{x\to x_0} x+\cdots+\lim_{x\to x_0} a_n\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n \\
&= a_0+a_1x_0+\cdots+a_n(x_0)^n=p(x_0).
\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.4**

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{4x^3-7}=\frac{40}{107}.$$

**Solución.** Notemos que $p(x)=5x^2-2x+1$ y que $q(x)=4x^3-7$ son polinomios. Entonces

$$\lim_{x\to 3} p(x)=p(3)=5(3)^2-2(3)+1=40,$$
$$\lim_{x\to 3} q(x)=q(3)=4(3)^3-7=107.$$

Puesto que $\lim_{x\to 3} q(x)=107\neq 0$, hacemos

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{4x^3-7}=\frac{\lim_{x\to 3} p(x)}{\lim_{x\to 3} q(x)}=\frac{40}{107}.$$

Obteniendo así el resultado deseado. ■

Al calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

suele pasar que $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. En este caso hay dos métodos usuales que detallaremos en los siguientes ejemplos (también se puede usar, en este caso, la regla de L'Hospital que se verá en la Sección 7.4).

**Ejemplo 4.5** *Calcular*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}.$$

**Solución.** Notemos que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2}(x^2-2x)=0.$$

Factorizando los polinomios, $x^2-4=(x+2)(x-2)$ y $x^2-2x=x(x-2)$, obtenemos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\frac{2+2}{2}=2.$$

Como queríamos. ■

**Ejemplo 4.6** *Calcular*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x^2+2x}{x^3-5x^2+7x-3}.$$

**Solución.** Primero observemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^4-3x^2+2x)=0 \text{ y } \lim_{x\to 1}(x^3-5x^2+7x-3)=0.$$

Dividiendo los polinomios $x^4-3x^2+2x$ y $x^3-5x^2+7x-3$ entre $x-1$, nos queda

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & x^3 \quad + x^2 - 2x \\ \cline{2-2}
x-1\,\big) & x^4 \qquad -3x^2+2x \\
 & \underline{-x^4+x^3 \qquad\qquad\quad} \\
 & x^3-3x^2 \qquad \\
 & \underline{-x^3 \quad +x^2 \qquad} \\
 & -2x^2+2x \\
 & \underline{2x^2-2x} \\
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r@{}r}
 & x^2-4x+3 \\ \cline{2-2}
x-1\,\big) & x^3-5x^2+7x-3 \\
 & \underline{-x^3 \quad +x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & -4x^2+7x \qquad \\
 & \underline{4x^2-4x \qquad} \\
 & 3x-3 \\
 & \underline{-3x+3} \\
 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x^2+2x}{x^3-5x^2+7x-3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2-2x)}{(x-1)(x^2-4x+3)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+3}.
\end{aligned}
$$

Nuevamente tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2-2x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}(x^2-4x+3)=0.$$

Dividamos

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & x^2+2x \\ \cline{2-2}
x-1\,\big) & x^3 \quad +x^2-2x \\
 & \underline{-x^3 \quad +x^2 \qquad} \\
 & 2x^2-2x \\
 & \underline{-2x^2+2x} \\
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r@{}r}
 & x-3 \\ \cline{2-2}
x-1\,\big) & x^2-4x+3 \\
 & \underline{-x^2 \quad +x \qquad} \\
 & -3x+3 \\
 & \underline{3x-3} \\
 & 0
\end{array}
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)(x-3} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2x}{x^3-5x^2+7x-3}=-\frac{3}{2}.$$
Calculando así el límite deseado. ■

Otro método usual, que veremos a continuación, es el de racionalizar.

**Ejemplo 4.7** *Calcular el*
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

**Solución.** Nótese que $\lim_{x\to 0} x=0$ y $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-1)=0$. Racionalizando resulta
$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}\\ &= \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\sqrt{x+1}+1,\end{aligned}$$
donde hemos usado, en la segunda igualdad, que el denominador es una diferencia de cuadrados. Así
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=\sqrt{0+1}+1=2.$$
Obteniendo el límite deseado. ■

El límite del Ejemplo 4.1 se puede encontrar también racionalizando.

Ahora consideraremos la composición de límites. Es decir, si
$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ y } \lim_{y\to L} g(y)=M, \text{ entonces } \lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=M.$$

Por ejemplo, supongamos que $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y
$$\begin{aligned} g_1(y) &= \sqrt[n]{y}, \quad y\geq 0, \quad n\in\mathbb{N},\\ g_2(y) &= \sqrt[n]{y}, \quad y\in\mathbb{R}, \quad n \text{ impar}.\end{aligned}$$

En este caso
$$\begin{aligned}\lim_{y\to L} g_1(y) &= \sqrt[n]{L}, \quad \text{si}, \quad L>0,\\ \lim_{y\to L} g_2(y) &= \sqrt[n]{L}, \quad \text{si} \quad L\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\begin{cases}\sqrt[n]{L}, & \text{si} \quad L>0, \quad n\in\mathbb{N},\\ \sqrt[n]{L}, & \text{si} \quad L\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \text{impar}.\end{cases}$$

**Ejemplo 4.8** *Calcular*
$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{3x^2+2x-8} \quad y \quad \lim_{x\to 0}\sqrt[4]{4x^3+7}.$$

**Solución.** Observamos que

$$\lim_{x\to 0}(3x^2+2x-8)=-8, \quad \lim_{x\to 0}(4x^3+7)=7,$$

entonces

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{3x^2+2x-8}=\sqrt[3]{-8}=-2,$$

pues $n=3$ es impar, y $\lim_{x\to 0}\sqrt[4]{4x^3+7}=\sqrt[4]{7}$, está bien definido ya que $7\geq 0$. ■

Más generalmente, si $m,n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{x\to a} f(x)=L$, entonces

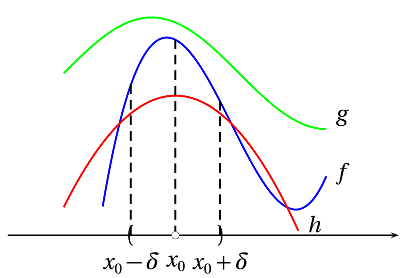
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{m/n}=L^{m/n}, \quad \text{si } L\geq 0,\ n \text{ impar},$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{-m/n}=L^{-m/n}, \quad \text{si } L>0.$$

Una propiedad más de los límites es el teorema de la estricción (o comparación o quesadilla o del ladrón y los dos policías (Rusia)). Suponga que existe $\delta>0$ tal que

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x), \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}.$$

Esto gráficamente significa




Además, si

$$\lim_{x\to a} g(x)=L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} h(x)=L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)=L.$$

**Ejemplo 4.9** *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Solución.** Sabemos que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1, \quad \forall x\neq 0.$$

Multiplicando por $|x|$, nos queda

$$\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

es decir (ver el inciso (e) del Ejercicio 2.13)

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad \forall x \neq 0.$$

Ya que $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ y $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, existen y son iguales, entonces el resultado es consecuencia del teorema de comparación de límites. ■

Todas las propiedades sobre límites mencionadas hasta aquí se cumplen también para límites unilaterales. Veamos cómo se aplican.

**Ejemplo 4.10** *Calcular*

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{[\![1/x]\!]},$$

*donde* $[\![\cdot]\!]$ *es la función mayor entero menor o igual que.*

**Solución.** Notemos que

$$[\![1/x]\!] \leq \frac{1}{x} \leq [\![1/x]\!] + 1,$$

para cada $x \neq 0$. De la segunda parte de la desigualdad deducimos

$$\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 < [\![1/x]\!] \Rightarrow \frac{x}{1-x} > \frac{1}{[\![1/x]\!]}.$$

Por lo tanto

$$x \leq \frac{1}{[\![1/x]\!]} < \frac{x}{1-x}.$$

Como $\lim_{x\downarrow 0} x = 0$ y $\lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$, entonces $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{[\![1/x]\!]} = 0$. ■

**Ejercicio 4.5** *Calcular*

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Ejercicio 4.6** *Calcular los límites siguientes*

$$(a) \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, \qquad (c) \quad \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3},$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad (d) \quad \lim_{z\to -2} \frac{z^3+8}{z+2}.$$

**Ejercicio 4.7** *Indicar por qué los siguientes límites no existen*

$$(a)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3},\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2},\qquad (c)\ \lim_{x\to 3}\frac{[\![x-3]\!]}{x-3}.$$

**Ejercicio 4.8** *Calcular los límites*

$$(a)\ \lim_{x\to -8}\frac{16x^{2/3}}{4-x^{4/3}},\quad (d)\ \lim_{x\to 1/2}\frac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7},\quad (g)\ \lim_{x\to -1}\frac{1}{x-\frac{x}{x+1/x}},$$

$$(b)\ \lim_{t\to 2}\sqrt{5t^2+9}\ \sqrt[5]{9t+1},\quad (e)\ \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(1/x)+(1/3)},\quad (h)\ \lim_{u\to 1}\frac{\sqrt{2u-1}-1}{2u-2}$$

$$(c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right),\quad (f)\ \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6,\quad (i)\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right).$$

**Ejercicio 4.9** *Si existen los límites, calcularlos; si no existen, indicar por qué,*

$$(a)\ \lim_{x\downarrow 1}[\![x]\!],\quad (c)\ \lim_{x\uparrow 1}[\![x]\!],\quad (e)\ \lim_{x\downarrow 5}\frac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3},\quad (g)\ \lim_{x\uparrow 5}\frac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3},$$

$$(b)\ \lim_{x\downarrow 6}\sqrt{x-5},\quad (d)\ \lim_{x\uparrow 6}\sqrt{5-x},\quad (f)\ \lim_{x\downarrow 1}\sqrt[3]{x-1},\quad (h)\ \lim_{x\uparrow 1}\sqrt[3]{x-1}.$$

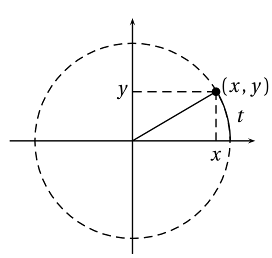
## 4.3. Límites de funciones trigonométricas

Iniciamos recordando que sen $x$ y cos $x$ están definidas para toda $x\in\mathbb{R}$, es decir, su dominio es todo $\mathbb{R}$. Muchos límites de funciones trigonométricas se pueden calcular a partir de los siguientes límites

$$(a)\quad \lim_{t\to 0}\operatorname{sen}\ t=0,\qquad (c)\quad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}\ t}{t}=1,$$

$$(b)\quad \lim_{t\to 0}\cos\ t=1,\qquad (d)\quad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\ t}{t}=0.$$

Vamos a discutir de manera breve, e intuitiva, cómo se obtienen estos límites. Trataremos primero los límites $(a)$-$(b)$. Queremos hacer que sen $t$ y cos $t$ estén muy próximos a 0 haciendo que $t$ esté cercano a 0. Supongamos que $0<t<\pi/2$ y consideremos la figura



De la definición de seno y coseno tenemos que

$$0 < \operatorname{sen} t = y < t. \tag{4.1}$$

De la identidad $x^2 + y^2 = 1$ y (4.1) concluimos que

$$1 - x^2 < t^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - t^2 < x^2,$$

es decir,

$$\sqrt{1 - t^2} < x = \cos t \leq 1. \tag{4.2}$$

Puesto que

$$\lim_{t \downarrow 0} t = 0,$$

entonces por el teorema de comparación resulta de (4.1) que

$$\lim_{t \downarrow 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Por otra parte

$$\lim_{t \downarrow 0} \sqrt{1 - t^2} = 1,$$

implica, usando el teorema de comparación y (4.2), que

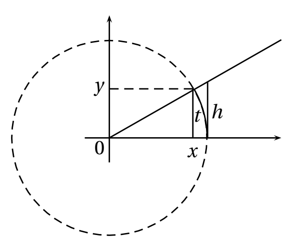
$$\lim_{t \downarrow 0} \cos\ t = 1.$$

Análogamente se puede verificar que

$$\lim_{t \uparrow 0} \operatorname{sen} t = 0, \quad \lim_{t \uparrow 0} \cos t = 1.$$

De lo cual se deducen los límites $(a)$ y $(b)$.

Cabe mencionar que los límites $(c)$ y $(d)$ serán consecuencia inmediata de la regla de L'Hospital, ver el Ejemplo 7.15. Sin embargo, presentamos enseguida un método para obtener estos límites. Esto debido a que nos presenta una buena oportunidad de hacer uso de los conceptos introducidos en las Secciones 15.6, 15.7 del Apéndice. Consideremos la siguiente figura que involucra al círculo unitario:




De la figura vemos que el área del triángulo rectángulo de base $x$ y altura $y$ ($\frac{1}{2} x \cdot y$) es menor que el área del sector con amplitud de $t$ radianes ($\frac{1}{2} t$, ver (15.4)) y esta área es menor que el área del triángulo rectángulo de base 1 y altura $h$ ($\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h$), es decir,

$$\frac{1}{2}xy < \frac{t}{2} < \frac{h}{2}. \tag{4.3}$$

Por otra parte, el triángulo de base $x$ y altura $y$ es semejante al triángulo de lado 1 y altura $h$, por ende de (15.5) se obtiene

$$\frac{1}{x} = \frac{h}{y} \Rightarrow h = \frac{y}{x}.$$

Así, (4.3) se convierte en

$$\frac{xy}{2} < \frac{t}{2} < \frac{y}{2x}.$$

En la desigualdad precedente multiplicamos por 2, tomamos recíprocos y usamos las definiciones de las funciones seno y coseno, para concluir que

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < \frac{1}{\cos t}.$$

Usando el límite $(b)$ y el teorema de comparación concluimos que el límite en $(c)$ es cierto.

Para calcular el límite $(d)$ usaremos un tipo de "racionalización", es decir multiplicaremos y dividiremos por $1+\cos t$:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos t}{t} &= \frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\\
&= \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} = \frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0} = 0,$$

entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} = 0.$$

A continuación presentamos otros métodos para calcular límites trigonométricos.

**Ejemplo 4.11** *Calcular*

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x}, \quad (b)\quad \lim_{u\to 0}\frac{\cos(u+\pi/2)}{u}.$$

**Solución.** (a) Hagamos $t=5x$. Nótese que si $x\to 0$, entonces $t\to 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\\ &= \left(\frac{5}{2}\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(b) Usando la identidad del coseno de la suma de ángulos (ver (15.8)) deducimos que

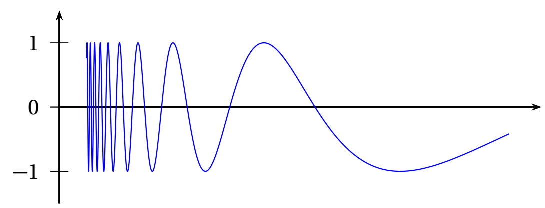
$$\lim_{u\to 0}\frac{\cos(u+\pi/2)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{-\operatorname{sen}u}{u}=-1.$$

Como queríamos verificar. ∎

**Ejemplo 4.12** *Estudiar*

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

**Solución.** Usando algún software matemático, MatLab por ejemplo, podemos graficar la función $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ para darnos una idea del límite:




De esto vemos que cuando $x$ se aproxima a cero entonces $\operatorname{sen}(1/x)$ se aproxima a cualquier valor entre $-1$ y $1$. Específicamente, veamos que $\operatorname{sen}(1/x)$ se aproxima a $1$ y a $-1$, cuando $x\to 0$. En efecto, consideremos los números

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\quad \text{y}\quad \frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2n\pi},\tag{4.4}$$

y nótese que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$f\left(\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1,$$

$$f\left(\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)^{-1}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)=-1.$$

Es decir, para $n\in\mathbb{N}$ muy grande, ambos números en (4.4) se aproximan a 0, mientras que sus respectivos valores bajo $f$ se aproximan a $1$ y a $-1$. Esto significa que, por la unicidad de límite, el límite $\lim_{x\downarrow 0}\operatorname{sen}(x^{-1})$ no existe. ∎

**Ejercicio 4.10** *Calcular los siguientes límites:*

$$(a)\ \lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen}(x+\pi/4)-1}{x-\pi/4},\quad (d)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{1-x},\quad (g)\ \lim_{s\to 1}(s^2-1)^3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{s-1}\right)^3,$$

$$(b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x},\quad (e)\ \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 8t}{t^2},\quad (h)\ \lim_{t\to 0}\frac{2(1+t^2-\cos t)-\operatorname{sen}^2 t}{t+t^2-t\cos t},$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}{1-\cos x},\quad (f)\ \lim_{u\to 0}\frac{u^2(5+\operatorname{sen} u)}{(u+\operatorname{sen} u)^2},\quad (i)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1-\cos x)}.$$

# Capítulo 5

# Límites al infinito

En este capítulo introducimos el concepto de límite al infinito y veremos cómo se relaciona este concepto con el de asíntota (vertical u horizontal).

## 5.1. Límites finitos al infinito

Sean $-\infty$ y $+\infty$ dos símbolos tal que

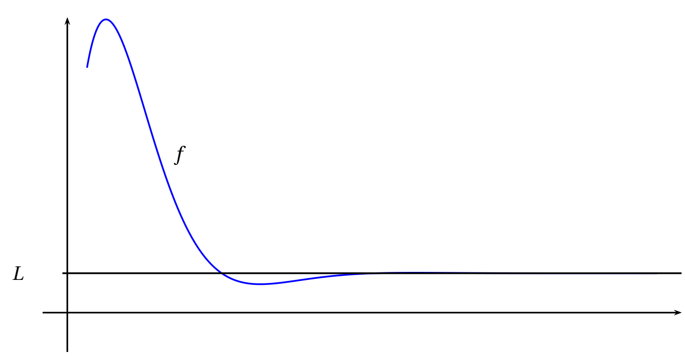
$$-\infty < x < +\infty,$$

es decir, $-\infty$ es menor que todo número real, $x$, y $+\infty$ es mayor que todo número real, $x$. En ocasiones en lugar de $+\infty$ escribiremos $\infty$.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde $I$ es un intervalo de la forma $(a,\infty)$, $[a,\infty)$ o bien $I = \mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$ tiende al número real $L$ cuando $x$ tiende a $+\infty$ si $f(x)$ se puede aproximar a $L$ haciendo $x$ suficientemente grande. Si esto ocurre lo denotamos por

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Gráficamente significa que para valores de $x$, muy grandes, $f(x)$ se aproxima a $L$:

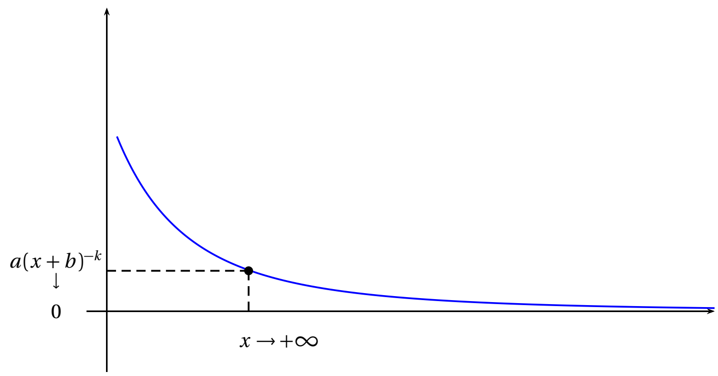



La línea recta $y = L$, paralela al eje $x$, se llama asíntota horizontal de la gráfica de $f$ en $L$.

**Ejemplo 5.1** *Si $k \in \mathbb{Q}_+$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{(x+b)^k} = 0.$$

**Solución.** Nótese que $a(x+b)^{-k}$ puede aproximarse tanto como se quiera a 0, haciendo $x$ muy grande. Se tiene una representación gráfica de la siguiente forma




Más precisamente, si $x$ es muy grande, entonces $x+b$ será también muy grande, en particular $x+b>0$, por lo tanto tiene sentido la expresión $(x+b)^k$, la cual será también muy grande. De este modo, sin importar el signo de $a$, la cantidad $a(x+b)^{-k}$ será muy pequeña. ■

Se definen de manera análoga el límite y las asíntotas en $-\infty$.

**Ejercicio 5.1** *Trazar la gráfica de $f(x) = (7+x^4)^{-1}$ y estudiar sus asíntotas horizontales.*

Se tienen, entre otras, las siguientes propiedades. Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M,$$

o bien

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = M,$$

entonces se cumplen las operaciones aritméticas de la Sección 4.2.

**Ejemplo 5.2** *Estudiar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x$.*

**Solución.** Nótese que

$$0 \le \left|\frac{1}{x}\operatorname{sen} x\right| = \frac{1}{|x|}\,|\operatorname{sen} x| \le \frac{1}{|x|}.$$

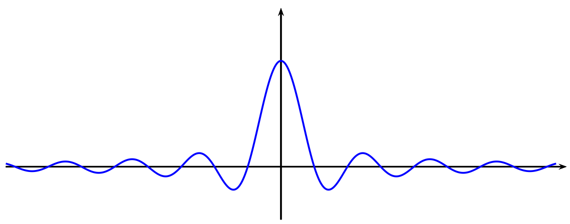
De esto deducimos que

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{x}\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{|x|}.$$

Puesto que $|x|^{-1}$ puede aproximarse a 0 tomando valores de $x$ muy grandes, resulta que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\operatorname{sen} x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\operatorname{sen} x = 0.$$

La gráfica de la función $f$ tiene la forma



En ella podemos apreciar que en efecto el eje $x$ es una asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$. ∎

**Ejemplo 5.3** *Sea*

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x^{3/2} - x^{1/4}}.$$

*Calcular* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**Solución.** No es posible calcular el primer límite pues $x^{3/2} = (x^3)^{1/2}$ no tiene sentido si $x < 0$. Para calcular el límite a $\infty$ dividamos el numerador y el denominador entre el término de mayor exponente, es decir, entre $x^{3/2}$,

$$\frac{2x+3}{4x^{3/2} - x^{1/4}} = \frac{\dfrac{2x+3}{x^{3/2}}}{\dfrac{4x^{3/2} - x^{1/4}}{x^{3/2}}} = \frac{\dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{3}{x^{3/2}}}{4 - \dfrac{1}{x^{5/4}}}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{3/2}} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{5/4}} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{4x^{3/2} - x^{1/4}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Como queríamos. ∎

**Ejemplo 5.4** *Calcular* $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1})$.

**Solución.** Intuitivamente esperamos que el límite sea 0, pues si $x$ es muy grande entonces $\sqrt{x^2+2}$ y $\sqrt{x^2+1}$ se parecen mucho (por ejemplo, $\sqrt{10,000^2+2} = 10,000.0001$ y $\sqrt{10,000^2+1} = 10,000.00005$). Para verificar esto racionalizamos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Ahora dividamos el numerador y denominador entre $x$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0.
\end{aligned}$$

Obteniendo así el resultado deseado. ∎

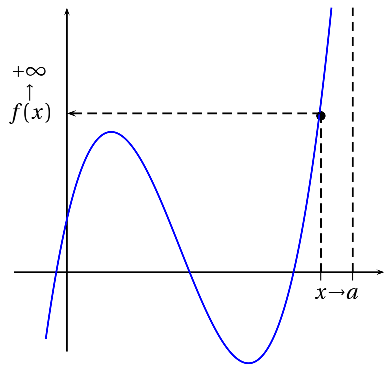
**Ejercicio 5.2** *Calcular los límites*

$$\begin{array}{ll}
(a)\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-8}{3x^2+9x+4}, & (d)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5}{x^3+8x+4}, \\
(b)\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-5}{x^3+8x+4}, & (e)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-8}{3x^2+9x+4}, \\
(c)\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4)-5\cos x}{x^4}, & (f)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4)-5\cos x}{x^4}.
\end{array}$$

## 5.2. Límites infinitos

Ahora estudiaremos la situación en la que el límite sea infinito. Habrá dos casos, cuando $x$ tienda a un número real, o bien, a (más o menos) infinito. En ambos casos el concepto es similar.

Decimos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x$ se aproxima a $a$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, si $f(x)$ se puede hacer arbitrariamente grande cuando se toma $x$ cercana a $a$. Gráficamente, este concepto podemos ver así:

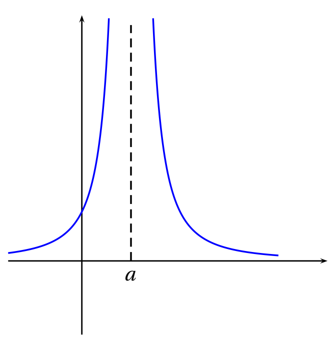



Simbólicamente lo denotamos por, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. La recta vertical $x = a$ se llama asíntota vertical (en $\infty$) de la gráfica de $f$ por la izquierda de $a$. Se dice también que $f$ tiene una discontinuidad infinita en $a$ (ver la página 67). Por lo general, las asíntotas verticales provienen de las indeterminaciones de la función en cuestión. Análogamente se define

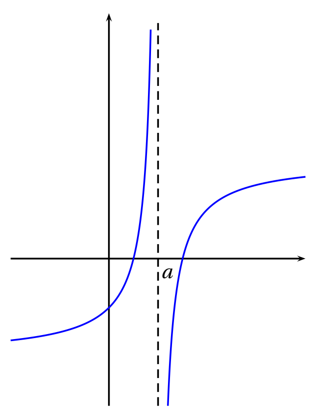
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

y los límites unilaterales (en este caso $a \in \mathbb{R}$).

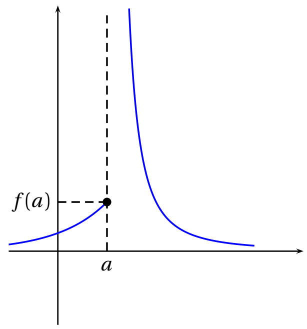
Los límites unilaterales infinitos se definen de manera similar. Tenemos los siguientes casos



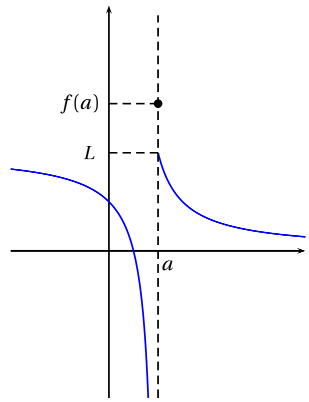

$\lim_{x\uparrow a} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\downarrow a} f(x) = +\infty$,




$\lim_{x\uparrow a} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\downarrow a} f(x) = -\infty$,




$\lim_{x\uparrow a} f(x) = f(a)$,
$\lim_{x\downarrow a} f(x) = +\infty$,




$\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$,
$\lim_{x\uparrow a} f(x) = -\infty$.

Como en el Ejemplo 5.1 tenemos que, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$,

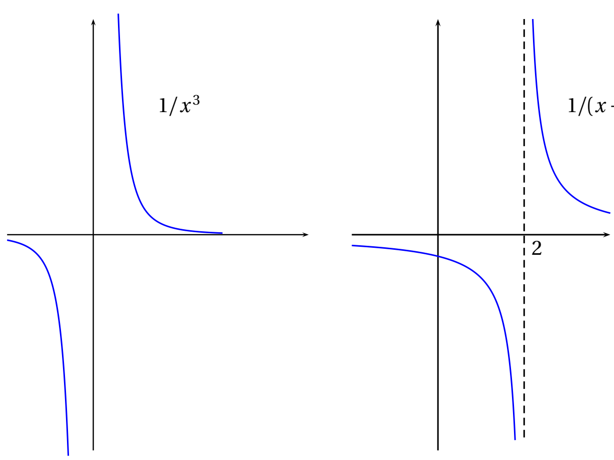
$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow b} \frac{a}{(x-b)^{m/n}} &= \operatorname{sig}(a)\infty, \\
\lim_{x\uparrow b} \frac{a}{(x-b)^{m/n}} &= (-1)^m \operatorname{sig}(a)\infty, \quad n\text{-impar}.
\end{aligned}$$

La abreviatura sig$(a)$ significa el signo de $a$ (ver el Ejemplo 4.3).

**Ejemplo 5.5** *Estudiar las asíntotas de*

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}.$$

**Solución.** Usando traslaciones es fácil dar un esbozo de la gráfica de $f$




Deducimos que $x = 2$ es una asíntota vertical y $y = 0$ es una asíntota horizontal. ∎

**Ejemplo 5.6** *Estudiar las asíntotas verticales de*

$$(a)\ f(x)=\frac{-3}{(x^2-1)^{3/4}}, \quad (b)\ g(x)=\frac{6}{(x^3-8)^{1/3}}.$$

**Solución.** Los límites

$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{-3}{(x^2-1)^{3/4}}, \quad \lim_{x\downarrow -1}\frac{-3}{(x^2-1)^{3/4}},$$

no tienen sentido pues los valores que se obtienen no están en el dominio de la función. Por otra parte,

$$\lim_{x\downarrow 1}\frac{-3}{(x^2-1)^{3/4}}=-\infty, \quad \lim_{x\uparrow -1}\frac{-3}{(x^2-1)^{3/4}}=-\infty,$$
$$\lim_{x\uparrow 2}\frac{6}{(x^3-8)^{1/3}}=-\infty, \quad \lim_{x\downarrow 2}\frac{6}{(x^3-8)^{1/3}}=\infty.$$

De esto deducimos que 1 y $-1$ son asíntotas verticales de $f$ en $-\infty$, por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Además, 2 es una asíntota vertical de $g$, en $-\infty$ por la izquierda y en $\infty$ por la derecha. ∎

Si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=L\in\mathbb{R}, \tag{5.1}$$

entonces

$(a)$ $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\infty$.

$(b)$ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\mathrm{sig}(L)\infty, \quad (L\neq 0)$.

$(c)$ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\mathrm{sig}(L)\infty, \quad (L\neq 0)$.

$(d)$ $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0, \quad (L\neq 0)$.

Resultados análogos se obtienen cuando $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ y también para límites unilaterales (en este caso $a\in\mathbb{R}$).

Si $L=0$ en (5.1), entonces no se puede inferir el valor del límite en $(b)$, $(c)$ y $(d)$. En efecto, sean

$$f(x)=x^2, \quad g(x)=\frac{1}{x}, \quad h(x)=\frac{1}{x^3},$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} h(x)=0,$$

sin embargo

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty} x=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

**Ejemplo 5.7** *Encontrar las asíntotas de*

$$f(x) = \frac{2x^2}{25 - x^2}.$$

**Solución.** Notemos primero que

$$\frac{2x^2}{25 - x^2} = \frac{2x^2}{(5+x)(5-x)}.$$

De esto vemos que en 5 y en $-5$ la función se indetermina, por lo tanto $x = 5$ y $x = -5$ son asíntotas verticales. Encontremos los límites correspondientes, para esto usaremos las propiedades de los límites dadas en la página anterior. Hagamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow -5} \frac{2x^2}{25 - x^2} &= \lim_{x \uparrow -5} \frac{1}{5+x} \cdot \frac{2x^2}{5-x} \\ &= \lim_{x \uparrow -5} \frac{1}{5+x} \cdot \lim_{x \uparrow -5} \frac{2x^2}{5-x}. \end{aligned}$$

Calculemos los límites por separado. El primero es

$$\lim_{x \uparrow -5} \frac{2x^2}{5-x} = \frac{2(-5)^2}{5-(-5)} = 5.$$

Por otra parte, debido a que $x \uparrow -5$, es decir $x < -5$, implica que $x + 5 < 0$, por lo tanto

$$\frac{1}{x+5} < 0,$$

por ende

$$\lim_{x \uparrow -5} \frac{1}{5+x} = -\infty.$$

Así

$$\lim_{x \uparrow -5} \frac{2x^2}{25 - x^2} = -\infty.$$

Estudiemos ahora el límite unilateral

$$\lim_{x \downarrow -5} \frac{2x^2}{25 - x^2} = \lim_{x \downarrow -5} \frac{1}{5+x} \cdot \frac{2x^2}{5-x}.$$

En este caso $x > -5$, por lo tanto $x + 5 > 0$, luego

$$\lim_{x \downarrow -5} \frac{1}{5+x} = \infty.$$

El otro límite es

$$\lim_{x \downarrow -5} \frac{2x^2}{5-x} = \frac{2(-5)^2}{5-(-5)} = 5.$$

De lo cual deducimos que

$$\lim_{x \downarrow -5} \frac{2x^2}{25 - x^2} = \infty.$$

Procediendo de manera análoga calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow 5}\frac{2x^2}{25-x^2} &= \lim_{x\uparrow 5}\underbrace{\frac{1}{5-x}}_{\text{signo }+}\cdot\frac{2x^2}{5+x}=(+\infty)\frac{2(5)^2}{5+5}=\infty,\\
\lim_{x\downarrow 5}\frac{2x^2}{25-x^2} &= \lim_{x\downarrow 5}\underbrace{\frac{1}{5-x}}_{\text{signo }-}\cdot\frac{2x^2}{5+x}=(-\infty)\frac{2(5)^2}{5+5}=-\infty.
\end{aligned}$$

Para encontrar la asíntota horizontal calculamos $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

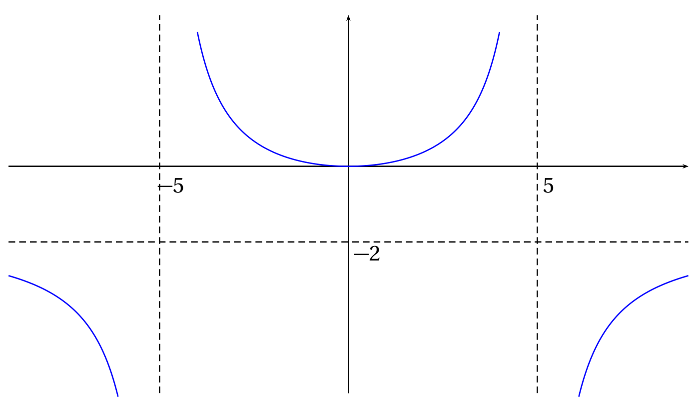
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{25-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2}2x^2}{\frac{1}{x^2}(25-x^2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{25}{x^2}-1}=-2.$$

Análogamente se ve que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{25-x^2}=-2.$$

De este modo deducimos que $y=-2$ es una asíntota horizontal.

Esta información nos permite hacer un boceto de la gráfica de $f$:




En la gráfica se aprecian las tres asíntotas de la función. ∎

**Ejercicio 5.3** *Encuentre las asíntotas de las siguientes funciones*

$$(a)\ \ f(x)=\frac{x}{x^3+x^2-1},\quad (b)\ \ g(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3},\quad (c)\ \ h(x)=\frac{x^2-5x}{x^2-25}.$$

*Para responder (a) se puede auxiliar con algún programa de cómputo.*

## 5.3. Asíntotas oblicuas

Decimos que $h$ es una asíntota oblicua de $f$ en $\infty$ si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=1.$$

Esto significa que los valores de $f$ y $h$ son muy parecidos para $x$ suficientemente grande. Análogamente se define asíntota oblicua en $-\infty$.

**Ejemplo 5.8** *Verificar que* $h(x)=79.041+6.39x$ *es una asíntota oblicua de* $f(x)=79.041+6.39x-e^{3.261-0.993x}$ *en* $\infty$.

**Solución.** Notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)-e^{3.261-0.993x}}{h(x)}\\ &= 1-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3.261-0.993x}}{h(x)}\\ &= 1-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3.261}}{(79.041+6.39x)e^{0.993x}}=1-0,\end{aligned}$$

en las dos últimas igualdades hemos usado propiedades elementales de la función exponencial (si el lector no las conoce no es un gran inconveniente pues las estudiaremos con detalle en la Sección 11.1). En el contexto del ejemplo que se estudió en la Subsección 1.2.2 significa que la estatura de una persona crece de manera lineal, para $x$ grande. ■

Ahora supongamos que $f$ es una función racional,

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

donde el grado de $p$ es mayor que el grado de $q$. Haciendo la división nos queda

$$f(x)=h(x)+\frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $h(x)$ y $r(x)$ son polinomios y el grado de $r$ es menor que el grado de $q$. El polinomio $h(x)$ en este caso será una asíntota oblicua. Si $h(x)$ es fácil de graficar, entonces es conveniente usar esta asíntota oblicua para graficar la función $f(x)$, cuando $x$ es grande.

**Ejemplo 5.9** *Encontrar la asíntota oblicua de*

$$f(x)=\frac{5x^5+5x^3+x^2-7}{5x^3+1}$$

*y hacer un boceto de su gráfica en* $\pm\infty$.

**Solución.** Dividiendo

$$\frac{5x^5+5x^3+x^2-7}{5x^3+1} = x^2+1-\frac{8}{5x^3+1}.$$

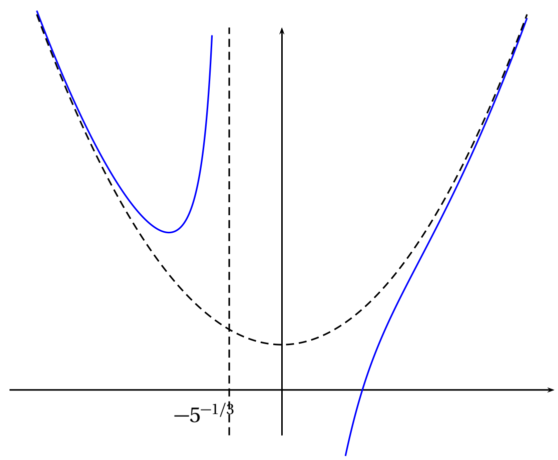
Tomando límites

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{5x^3+1}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{8}{5x^3+1}=0.$$

Esto significa que para $x$ grande (positivo o negativo)

$$\frac{8}{5x^3+1} \quad \text{es aproximadamente} \quad 0.$$

Así, la gráfica de $f$ se parece a la gráfica de $x^2+1$, esta última es la asíntota oblicua:




Nótese de paso que la función $f$, tiene una asíntota vertical en $x=-5^{-1/3}$. ■

**Ejemplo 5.10** *Encontrar la asíntota oblicua de*

$$f(x)=\frac{1-x^4}{2x^3-8x}$$

*y hacer un boceto de su gráfica en* $\pm\infty$.

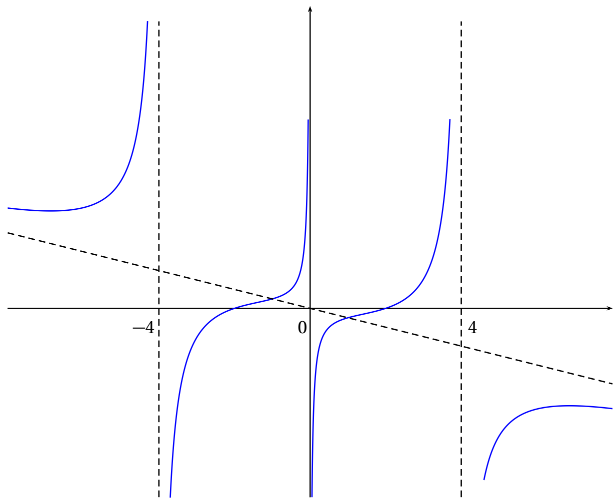
**Solución.** Al hacer la división obtenemos

$$\frac{1-x^4}{2x^3-8x}=-\frac{1}{2}x-\frac{4x-1}{2x^3-8x}.$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{2x^3-8x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x^3-8x}.$$

Así $-\frac{1}{2}x$ es una asíntota oblicua de $f$, de modo que para valores grandes (positivos o negativos) $f$ se aproxima a $-\frac{1}{2}x$, como se aprecia en la figura:




Factorizando $2x^3-8x=2x(x^2-4)=2x(x-2)(x+4)$ observamos que $-4$, $0$ y $4$ son asíntotas verticales. Más aún, $\lim_{x\uparrow -4} f(x)=\infty$, $\lim_{x\downarrow -4} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\uparrow 0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\uparrow 4} f(x)=\infty$, $\lim_{x\downarrow 4} f(x)=-\infty$. ■

**Ejercicio 5.4** *Estudiar las asíntotas oblicuas, verticales y horizontales de*

$$f(x)=\frac{2x^4+x^3-4x^2-5x}{x^3-3x+2}.$$

**Ejercicio 5.5** *Sean*

$$(a)\ \ f(x)=\frac{2x+1}{x(1-\sqrt{2-x^2})},\quad (b)\ \ g(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(1-\sqrt{2-x^2})}.$$

*Estudiar, de $f$ y $g$, los dominios, los rangos y las asíntotas.*

# Capítulo 6

# Funciones continuas

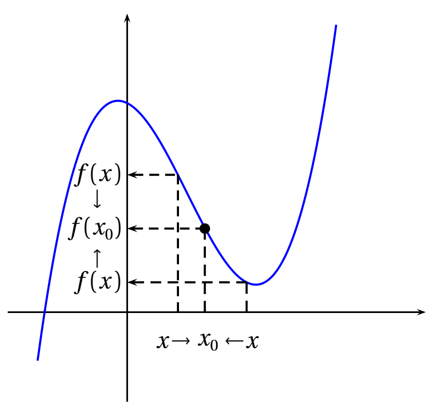
Una función es continua si su gráfica se parece a una cuerda o hilo de una sola pieza. Es decir, si su gráfica no está conformada por varios pedazos. En este capítulo definiremos este concepto y estudiaremos varias propiedades de las funciones continuas, entre ellas la propiedad del valor intermedio (de Bolzano).

## 6.1. Definición de continuidad

Recordemos que en el caso del concepto de límite, $\lim_{x\to a} f(x)$, no importaba si $f$ estaba definida en $a$, ahora esto será importante.

**Definición 6.1** *Sea $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D(f)$. Supongamos que existe un intervalo abierto $I$ tal que $x_0 \in I \subset D(f)$, si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe y es igual a $f(x_0)$, entonces decimos que $f$ es continua en $x_0$.*

La definición significa que $f$ será continua en $x_0$ si podemos aproximar $f(x)$ a $f(x_0)$, tanto como queramos, haciendo que $x$ se aproxime a $x_0$. Gráficamente lo podemos apreciar así:



Decimos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua en $(a,b)$ si $f$ es continua en cada punto de $(a,b)$. Si el dominio de $f$ es $[a,b]$, entonces decimos que $f$ es continua en $[a,b]$ si $f$ es continua en $(a,b)$ y además

$$\lim_{x\downarrow a} f(x)=f(a), \qquad \lim_{x\uparrow b} f(x)=f(b).$$

La interpretación geométrica de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ es que podemos dibujar la gráfica de $f$ sin despegar el lápiz del papel.

**Ejemplo 6.1** $(a)$ *Todo polinomio es una función continua en* $\mathbb{R}$.

$(b)$ *Toda función racional es continua en su dominio.*

**Solución.** Es inmediato de las propiedades de los límites, ver la Sección 4.2. ■

**Ejemplo 6.2** *La función* $f(x)=|x|$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

**Solución.** Si $x_0>0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0).$$

Si $x_0<0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(-x)=-x_0=f(x_0).$$

Por lo tanto $f$ es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si $x_0=0$, notamos que

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x)=\lim_{x\downarrow 0} x=0, \qquad \lim_{x\uparrow 0} f(x)=\lim_{x\uparrow 0}(-x)=0.$$

Así, $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Por ende, la función valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$. Ver la gráfica de la función valor absoluto en el Ejemplo 2.6 y en particular hay que notar su "pico" en 0, detalle que será importante en el concepto de derivada. ■

**Ejercicio 6.1** *Usando las identidades trigonométricas (15.7) y (15.8) verificar que*

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \tag{6.1}$$

**Ejemplo 6.3** *Las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *son continuas en* $\mathbb{R}$.

**Solución.** Veamos que $\operatorname{sen} x$ es continua en $\alpha\in\mathbb{R}$, análogamente se muestra que $\cos x$ es continua en $\alpha$. Sea $\beta\in\mathbb{R}$. Usamos la identidad trigonométrica (6.1)

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta\right| &= 2\left|\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right|\\ &\le 2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right|.\end{aligned}$$

De la desigualdad precedente vemos que $\operatorname{sen}\beta$ se aproxima tanto como se quiera aproximando $\beta$ a $\alpha$, esto ocurre porque $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 0, cuando $x$ se aproxima a 0 (ver el límite del inciso $(a)$ en la Sección 4.3). De esto deducimos que

$$\lim_{\beta\to\alpha}\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha.$$

Es decir, $\operatorname{sen} x$ es continua para cada $x\in\mathbb{R}$. ■

**Ejemplo 6.4** *Estudiar la continuidad de*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{x-5}\cdot$$

**Solución.** Primero nótese que

$$\begin{aligned} D(f) &= \left\{x\in\mathbb{R} : x^2-4\geq 0, \quad x\neq 5\right\} \\ &= (-\infty,-2]\cup[2,5)\cup(5,\infty). \end{aligned}$$

Si $x_0\in(-\infty,-2)\cup(2,5)\cup(5,\infty)$, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{x-5}=\frac{\sqrt{x_0^2-4}+1}{x_0-5}=f(x_0),$$

esto es debido a que el límite del numerador y el límite del denominador existen, y este último es distinto de 0, pues $x_0\neq 5$. Por otra parte

$$\lim_{x\uparrow -2}\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{x-5}=\frac{1}{-2-5}=-\frac{1}{7},$$

$$\lim_{x\downarrow 2}\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{x-5}=\frac{1}{2-5}=-\frac{1}{3}.$$

Así, la función $f$ es continua en su dominio. ∎

Nótese que los límites

$$\lim_{x\uparrow 5}\frac{\sqrt{x^2-4}-1}{x-5} \quad \text{y} \quad \lim_{x\downarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-4}-1}{x-5}$$

son del tipo estudiado en la Sección 5.2, y son $-\infty$, $\infty$, respectivamente.

**Ejercicio 6.2** *Dadas las funciones*

$$(a)\ h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1, \\ -2, & x=-1, \end{cases} \qquad (b)\ F(x)=3|x|+\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}+4,$$

*encontrar los intervalos donde son continuas.*

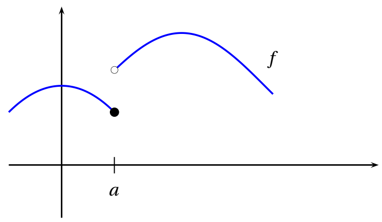
**Ejercicio 6.3** *Verificar que $f$ es continua en $c$ si y sólo si* $\lim_{h\to 0} f(h+c)=f(c)$.

**Ejercicio 6.4** *Sea*

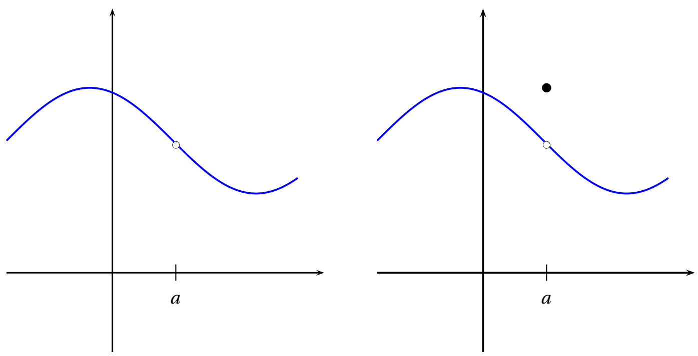
$$g(x)=\begin{cases} a^2x^2, & x\leq 2, \\ (1-a)x, & x>2. \end{cases}$$

*¿Para qué valores de a es continua $g$ en 2?*

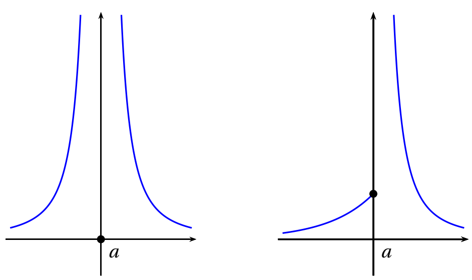
Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ no es continua en $c \in D(f)$ se dice que $f$ es discontinua en $c$. Hay varios tipos de discontinuidad, en las siguientes gráficas los presentamos:

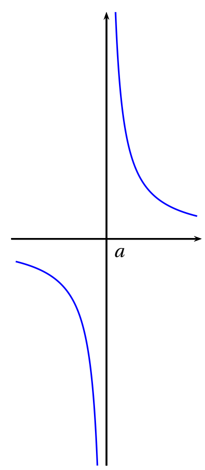



Discontinuidad de salto




Discontinuidades evitables




Discontinuidades infinitas

**Ejercicio 6.5** *Verificar que $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades de salto en los enteros.*

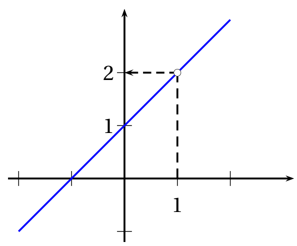
La función $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (ver su gráfica en la página 40) tiene discontinuidades infinitas en 0. Como veremos en seguida, las funciones continuas tienen muchas propiedades importantes, por ello es conveniente redefinir una función con una discontinuidad evitable de modo que se quite la discontinuidad. El método para hacerlo es “parchar” el hueco con el límite. Así se obtiene una función que resulta ser una extensión de la original, es decir, una función que coincide con la dada previamente, pero ahora el punto de discontinuidad evitable ya es parte de su dominio.

**Ejemplo 6.5** *Sea*

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}.$$

*Encontrar una extensión continua de $f$.*

**Solución.** Notamos que $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. De la gráfica




deducimos que el único punto de discontinuidad es 1. ¿Cómo obtenemos una función continua que extienda $f$?. Es decir, qué valor debe tener la función $f$ en 1 de modo que el hueco se tape. Es fácil ver que éste debe ser 2. De modo que la función continua buscada es

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

Así, $\widetilde{f}$ es una extensión de $f$, pues coincide con ella. ■

En resumen, $f$ tiene una discontinuidad evitable en $a$ si existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y se obtiene una extensión continua, $\widetilde{f}$, al definir $\widetilde{f}(a)=\lim_{x\to a} f(x)$.

**Ejemplo 6.6** *Encontrar una extensión continua de*

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

**Solución.** Recordemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Por lo tanto, 0 es una discontinuidad evitable. La función $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

es la extensión continua buscada. ■

**Ejercicio 6.6** *Sean*

$$f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} -4, & x \leq 0, \\ |x-4|, & x > 0. \end{cases}$$

*Determine si las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en* $0$.

**Ejercicio 6.7** *La cuota de un estacionamiento (con horario de 8:00 a 21:00 horas) es de* $5$ *pesos la primera hora y* $2$ *pesos por cada media hora o fracción adicional, hasta un máximo de* $35$ *pesos. Si un cliente llega en cuanto abre el estacionamiento, encuentre la función $f$ que relacione la cuota con el tiempo que está el auto en el estacionamiento. Trace la gráfica de $f$ y discuta su continuidad. ¿Cuánto cuesta el estacionamiento por* $4$ *horas y media?*

## 6.2. Propiedades de las funciones continuas

Si $f$ y $g$ son continuas en $a$, entonces $f+g$, $f-g$ y $fg$ son continuas en $a$. Más aún, si $g(a) \neq 0$, entonces $f/g$ es continua en $a$. Como se puede ver, no es difícil deducir estas propiedades de las propiedades análogas de los límites. Una propiedad similar se vale para la composición de funciones, es decir, si $f$ es continua en $a$ y $g$ es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en $a$. En particular, esto implica que podemos meter y sacar el límite en una composición,

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right).$$

**Ejemplo 6.7** *Estudiar la continuidad de*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{x^2-1}.$$

**Solución.** Sean $a(x) = x^3 - 1$, $b(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = \sqrt{x}$. Puesto que $D(r) = [0, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} D(r \circ a) &= \{x \in D(a) : a(x) \in D(r)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 \geq 0\right\} = [1, \infty). \end{aligned}$$

Además, $b(x) = 0$ si $x = -1$ o $x = 1$. Por lo tanto,

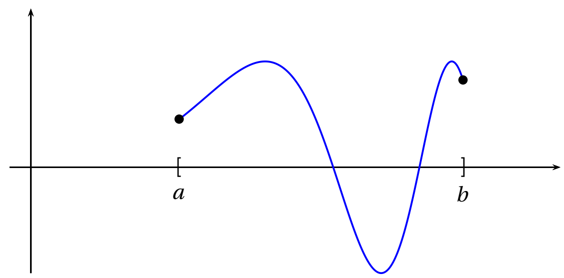
$$f(x) = \frac{r(a(x))}{b(x)},$$

es continua en $(1, \infty)$, pues $a, b$ y $r$ son continuas en este conjunto. ■

**Ejercicio 6.8** *Determinar si cada una de las siguientes funciones es continua o no. Si no lo es, determinar si la discontinuidad es evitable, de salto o infinita. Encontrar una extensión continua si existe:*

$$(a)\ u(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 1/x^2, & x > 1, \end{cases} \qquad (b)\ v(x) = \frac{(x-1)^2 - 2(x+3)}{(x-5)\sqrt{x+1}}.$$

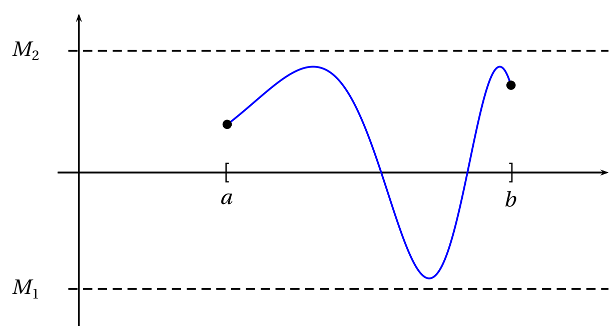
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Esto significa que la gráfica de $f$ no se corta, como hemos dicho es parecida a un hilo:




Hay tres aspectos importantes que podemos apreciar de la gráfica anterior:

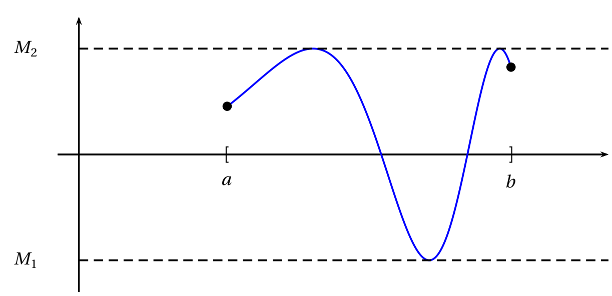
(**I**) Los valores de $f$ en $[a,b]$ están acotados. Es decir, existen $M_1$, $M_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$M_1\leq f(x)\leq M_2,\quad \forall x\in[a,b].$$




Esto significa intuitivamente que la gráfica de la función $f$ se encuentra comprendida entre las rectas $y=M_1$, $y=M_2$.

(**II**) Los números $M_1$ y $M_2$ no son únicos, funcionarán cualesquiera otros $M_1'$, $M_2'$ tal que $M_1'<M_1$ y $M_2'>M_2$. Más aún, $M_1$ y $M_2$ se pueden encontrar de manera óptima. Esto significa que se puede encotrar el menor $M_2$ que es cota superior de la gráfica y el mayor $M_1$ que es cota inferior de la gráfica. Geométricamente se vería así



Es decir, las líneas paralelas al eje $x$ que pasan por $M_1$ y $M_2$ cortan la gráfica de $f$, por lo tanto existen $x_1$, $x_2 \in [a,b]$ tales que

$$M_1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M_2, \quad \forall x \in [a,b].$$

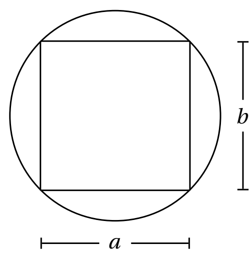
Los números $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se llaman valores mínimo y máximo de $f$ y se dice que se alcanzan en $x_1, x_2$, respectivamente.

**Ejercicio 6.9** *Dar un ejemplo de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua que sólo tome su máximo en dos puntos distintos y su mínimo sólo en cuatro puntos distintos.*

**Ejercicio 6.10** *Sea $f(x)=x$, $x\in(-1,2)$. Verificar que $f$ es acotada pero no alcanza su máximo y su mínimo. ¿Hay contradicción con el inciso* (**II**)*?*

**Ejemplo 6.8** *Sea $C$ un círculo de radio $r$ y $\mathscr{R}$ la colección de todos los rectángulos que pueden ser inscritos en $C$ (es decir, dibujados dentro de $C$). Hay en $\mathscr{R}$ un elemento que tiene área máxima.*

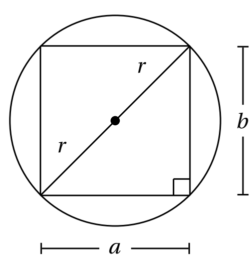
**Solución.** Sean $a, b$ los lados del rectángulo inscrito:




De este modo, el área del rectángulo inscrito es

$$\text{Área} = ab.$$

En este tipo de problemas, por lo general, aparecen más de una variable, en este caso $a$ y $b$. Lo que hay que hacer es usar los datos, que aquí sería el radio del círculo $r$, para expresar la cantidad de interés, el área, en términos de una sola variable. Observamos (ver la figura anterior) que podemos usar el Teorema de Pitágoras



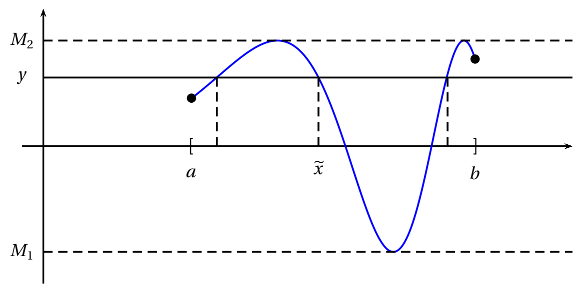

para obtener

$$a^2 + b^2 = (2r)^2,$$

por lo tanto
$$a = \sqrt{4r^2 - b^2}. \tag{6.2}$$
Por ende, el área del rectángulo está dada por
$$A(b) = b\sqrt{4r^2 - b^2}.$$
Nótese que $D(A) = [0, 2r]$. Por ser $A$ continua de la parte (**II**) tenemos que existe un $b_0 \in [0, 2r]$, tal que $A(b_0)$ es máxima. Así, (6.2) determina los lados que nos dan el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio $r$. ∎

Con ayuda del concepto de derivada estudiaremos un método para encontrar el punto $b_0$, por ende el $a_0$, del ejemplo anterior.

(**III**) Supongamos que $y$ está entre $M_1 = f(x_1)$, $M_2 = f(x_2)$ y que trazamos una línea paralela al eje $x$ que pasa por $y$. La continuidad de la función implicará que dicha línea interceptará a la gráfica de $f$ en al menos un punto:




Por lo tanto, existe un punto (o posiblemente más) $\tilde{x}$ en $[a, b]$ tal que $f(\tilde{x}) = y$. Esta propiedad de las funciones continuas se llama Teorema del Valor Intermedio.

**Ejercicio 6.11** *Sea*
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x(x-1)}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$
*Verificar que $f$ no alcanza ni su mínimo ni su máximo.*

**Ejercicio 6.12** *Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2$, $x \in [0,1]$. Verificar que $f$ tiene una raíz en $(0,1)$, es decir, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Una aplicación típica del Teorema del Valor Intermedio es su uso en el estudio de raíces de los polinomios. Por ejemplo, si $r_1 < r_2$ son dos raíces consecutivas del polinomio
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, \tag{6.3}$$
de grado $n$, entonces $p$ es de signo constante en $(r_1, r_2)$. Es decir,
$$p(x) < 0,\ \forall x \in (r_1, r_2), \quad \text{o bien} \quad p(x) > 0,\ \forall x \in (r_1, r_2).$$

En efecto, si $p$ cambiase de signo en $(r_1, r_2)$, entonces existirían $s, t \in (r_1, r_2)$ tales que $r_1 < s < t < r_2$ y, por ejemplo, $p(s) > 0$ y $p(t) < 0$ (análogamente, si $p(s) < 0$ y $p(t) > 0$). Puesto que $p(t) < 0 < p(s)$ por el Teorema del Valor Intermedio, entonces existe $x \in [s, t]$ tal que $p(x) = 0$. Lo que contradice la consecutividad de las raíces $r_1$ y $r_2$.

Si $p$ es un polinomio de grado $n$, como en (6.3), se puede usar el Teorema del Valor Intermedio para demostrar los siguientes hechos (ver [8]):
$(a)$ Si $n$ es impar, entonces $p$ tiene al menos una raíz real.
$(b)$ Si $n$ es par y $a_n > 0$ ($a_n < 0$), entonces $p$ tiene un mínimo (máximo) global.

**Ejemplo 6.9** *Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, encontrar los conjuntos en los que $p(x) > 0$, $p(x) < 0$ y trazar su gráfica.*

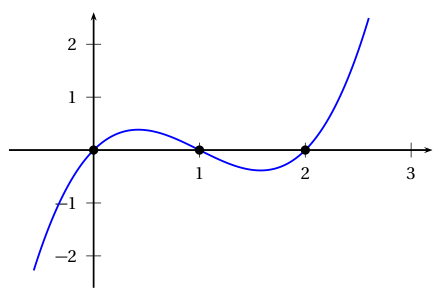
**Solución.** Hay que encontrar primero las raíces de $p$. Factorizando el trinomio, $x^2 - 3x + 2$, nos queda

$$0 = p(x) = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2).$$

Por lo tanto, las raíces de $p$ son $0, 1, 2$. Puesto que $p$ tiene grado impar, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty.$$

En consecuencia, $p$ tiene una gráfica de la forma




De esto deducimos que $p$ tiene signo positivo en $(0, 1)$ y $(2, \infty)$ y signo negativo en $(-\infty, 0)$ y $(1, 2)$. ■

**Ejercicio 6.13** *Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todos los círculos de radio menor o igual a* 10 *cm. Demostrar que el área de al menos un elemento de $\mathscr{R}$ tiene exactamente* 250 *cm*$^2$.

**Ejercicio 6.14** *Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todos los rectángulos que tienen perímetro $p >$* 0*. Demostrar que existe un elemento en $\mathscr{P}$ que tiene área máxima. ¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo?*

**Ejercicio 6.15** *Demuestre que $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene una raíz real en el intervalo* $(1, 2)$*. Calcule con dos dígitos de precisión dicha raíz.*

# Capítulo 7

# La derivada

El concepto principal del Cálculo Diferencial es el de derivada, en este capítulo introducimos este concepto y estudiamos sus principales propiedades. A saber, las propiedades aritméticas y la regla de la cadena. Además, como aplicación al cálculo de límites, veremos la Regla de L'Hospital.

## 7.1. Definición y primeros ejemplos

**Definición 7.1** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Decimos que $f$ es diferenciable en $x_0$ si existe el límite*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7.1}$$

*Este número, cuando existe, lo denotamos por alguna de las siguientes expresiones*

$$f'(x_0),\quad \frac{df}{dx}(x_0),\quad Df(x_0),$$

*y se llama derivada de $f$ en $x_0$.*

Puesto que $x-x_0\to 0$, cuando $x\to x_0$, si y sólo si $x_0+h\to x_0$, cuando $h\to 0$, entonces el límite (7.1) también puede escribirse como

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Nótese que si $f$ es una función constante, es decir, $f(x)=c$, entonces

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Es decir, las funciones constantes tienen derivada 0.

**Ejemplo 7.1** *Sea $f(x)=mx+b$, entonces $f'(x)=m$.*

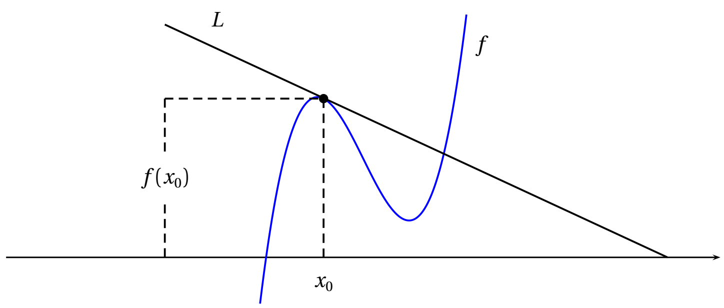
**Solución.** Sea $x \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario fijo. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(m(x+h)+b)-(mx+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{mx+mh+b-mx-b}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m.
\end{aligned}$$

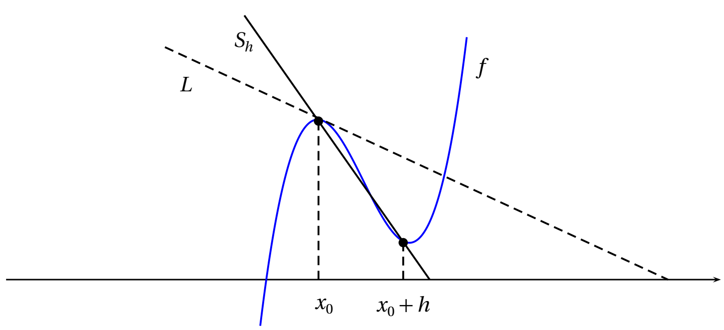
Así $f'(x) = m$. ■

Observe que la derivada de $f(x) = mx + b$ es justamente la pendiente de la línea recta $y = mx + b$ (ver la página 8).

En general, hay una relación muy estrecha entre el concepto de pendiente y el de derivada. Para discutir esto consideremos el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $f$ en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$. Supongamos un esquema de la siguiente forma




Sea $h \in \mathbb{R}$ y consideremos la recta $S_h$ que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$:




$S_h$ se llama recta secante y la podemos determinar del siguiente modo

$$\frac{S_h(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0},$$

despejando $S_h(x)$,

$$S_h(x)=(x-x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0).$$

De esta manera, si $h$ es pequeño, entonces $x_0+h$ y $x_0$ están muy cercanas; por ende, la recta secante $S_h$ y la recta tangente $L$ también estarán cercanas. Así, al hacer $h$ tender a 0, $h\to 0$, la recta secante se debe aproximar a una única recta tangente. En términos de límites esto se escribe así

$$\begin{aligned}
L(x_0) &= \lim_{h\to 0} S_h(x_0)\\
&= (x-x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)\\
&= (x-x_0)f'(x_0)+f(x_0). \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que la derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente $L$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se dice diferenciable en $(a,b)$ si $f'(x)$ existe para cada punto $x\in(a,b)$. Por otra parte, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice diferenciable en $[a,b]$ si $f$ es diferenciable en $(a,b)$ y las derivadas unilaterales $f'(a+)$ y $f'(b-)$, definidas como

$$f'(a+)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(b-)=\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h},$$

existen.

El que una función $f$ tenga derivada en $x_0$ nos indica cierto grado de buen comportamiento de la función $f$ en $x_0$. En efecto, calculemos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left\{f(x_0)+(x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right\}\\
&= f(x_0)+\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&= f(x_0)+0\cdot f'(x_0)\\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

Esto significa que $f$ es continua en $x_0$. Es decir, si $f$ es diferenciable en $x_0$, entonces $f$ es continua en $x_0$. Veremos a continuación que el recíproco es falso. Hay funciones $f$ continuas en $x_0$ y no diferenciables en $x_0$.

**Ejemplo 7.2** *Sea $f(x)=|x|$, entonces $f$ no es diferenciable en* 0.

**Solución.** Calculemos los siguientes límites unilaterales

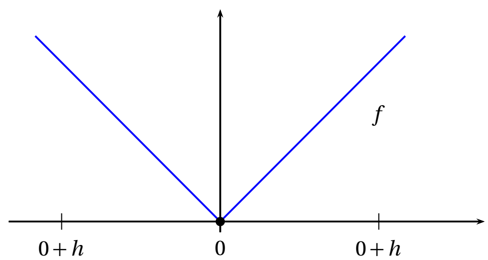
$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{h}{h}=1,\\
\lim_{h\uparrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\uparrow 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{-h}{h}=-1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (ver la página 41) significa que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

no existe. Es decir, $f(x)=|x|$, no es diferenciable en 0. ∎

Recordemos la gráfica de la función valor absoluto:




Notamos que cualquier recta secante a la izquierda de $(0,0)$ tiene pendiente $-1$ $(h<0)$ y cualquier recta secante a la derecha de $(0,0)$ tiene pendiente 1 $(h>0)$. Por ende, al hacer $h\to 0$ no tenemos una única recta tangente, sino que hay dos posibles opciones, esto se debe a que hay un pico en la gráfica de la función valor absoluto en 0.

Así, una función será diferenciable si la curva inducida por su gráfica es suave, es decir, sin picos.

Sea $f: I\to\mathbb{R}$, con $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo. Definimos la función derivada de $f$, denotada por $f'$, como aquella regla de correspondencia que a cada $x\in I$, donde $f$ es diferenciable, se le asigna el número $f'(x)$.

**Ejemplo 7.3** *Sea $f(x)=|x|$, encontrar la función derivada de $f$.*

**Solución.** Sea $x>0$, entonces a la derecha de $x$ (ver la gráfica anterior) la función $f$ es una línea recta con pendiente 1, por lo tanto $f'(x)=1$. Análogamente, si $x<0$ a la izquierda de $x$ la función $f$ es una línea recta con pendiente $-1$, así $f'(x)=-1$. Si $x=0$, la derivada no existe. Resumimos esto en

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

con $D(f')=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ∎

En el ejemplo precedente vimos que $D(f')=\mathbb{R}\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}=D(f)$. Esta contención se cumple siempre, es decir $D(f')\subset D(f)$.

**Ejemplo 7.4** *Sea $f(x)=8x^2-6x+1$. Encontrar $f'$.*

**Solución.** Sea $x \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario fijo. Calculemos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{8(x+h)^2-6(x+h)+1-(8x^2-6x+1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{8(x^2+2xh+h^2)-6x-6h+1-8x^2+6x-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{8h^2+16xh-6h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(8h+16x-6)=16x-6.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x)=16x-6$. ■

**Ejemplo 7.5** *Sea* $f(x)=\sqrt{x}$. *Encontrar* $f'$.

**Solución.** Sea $x>0$. Debemos calcular el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}. \tag{7.3}$$

Racionalizando, nos queda

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Nótese que si $x=0$, entonces el límite en (7.3) se convierte en

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty.$$

Por lo tanto, $f$ no es diferenciable en 0. De este modo, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ \ x\in D(f')=(0,\infty)$. ■

**Ejemplo 7.6** *Verificar que* $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$ *y* $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$.

**Solución.** Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario fijo. Debemos calcular los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}.$$

Usando las fórmulas de la suma de ángulos (15.7) y (15.8) nos queda

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h},$$

respectivamente. Usando los límites de la Sección 4.3 obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\operatorname{sen}x\cdot\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right\}\\
&= (\operatorname{sen}x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+(\cos x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}\\
&= (\operatorname{sen}x)\cdot 0+(\cos x)\cdot 1=\cos x,\\
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{(\cos x)\frac{\cos h-1}{h}-(\operatorname{sen}x)\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right\}\\
&= (\cos x)\cdot 0-(\operatorname{sen}x)\cdot 1=-\operatorname{sen}x.
\end{aligned}$$

De este modo, $(\operatorname{sen}x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\operatorname{sen}x.$ ■

## 7.2. Reglas para calcular derivadas

A continuación vamos a presentar algunas técnicas para derivar. Debido a que la derivada está definida en términos de límites, es de esperar que cumpla las propiedades artitméticas de los límites, ver la Sección 4.2.

### 7.2.1. Reglas aritméticas

En la sección anterior hemos visto que si $f(x)=mx+b$, entonces $f'(x)=m$. En esta sección vamos a deducir varias fórmulas de derivación, como hemos mencionado, esto será tan sólo un repaso de las propiedades de los límites.

Supongamos que $f$ y $g$ son diferenciables en $x_0$, entonces

(a) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$,

(b) $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$,

(c) $(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$,

si además $g(x_0)\neq 0$, entonces

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$

Para deducir la fórmula (a) debemos calcular

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right\}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

Para la fórmula producto sumamos y restamos un término, luego agrupamos de manera conveniente, para obtener

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ g(x_0+h)\cdot \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0)\cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Un caso particular de la fórmula producto es la derivada de una potencia, es decir,

$$(x^n)' = n x^{n-1}. \tag{7.4}$$

Esto se puede verificar usando inducción matemática. Es decir, sabemos que el resultado es cierto cuando $n = 1$ (ver el Ejemplo 7.1 con $m = 1$ y $b = 0$). Supongamos que (7.4) es cierto y veamos que se cumple para $n+1$. Tomando $f(x) = x^n$, $g(x) = x$, y usando (c) nos queda

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= (fg)'(x) \\
&= (x^n)(x)' + (x^n)' x \\
&= x^n \cdot 1 + n x^{n-1} \cdot x \\
&= x^n + n x^n = (n+1)x^n.
\end{aligned}$$

Lo que significa que la fórmula (7.4) también se cumple para $n+1$, por lo tanto es válida para cada $n \in \mathbb{N}$.

También se pueden aplicar $(a)$ y $(c)$ para deducir $(b)$, recordando que la derivada de una función constante es cero,

$$(f-g)'(x) = (f+(-1)g)'(x) = f'(x) + ((-1)g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Para verificar que (d) es cierta primero calculemos el límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)} \right\} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= -\frac{1}{g(x_0)\lim_{h\to 0} g(x_0+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{g(x_0)g(x_0)}\cdot g'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Lo que significa que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{7.5}$$

Una aplicación de esta fórmula es

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^n}\right)' &= -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}\\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}.\end{aligned}$$

Una aplicación más de (7.5) y (c) es la dedución de la fórmula del cociente

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 7.7** *Sea*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0,\\ x^3, & x\le 0.\end{cases}$$

*Encontrar $f'$ y la recta tangente a la gráfica de $f$ en los puntos* $(-1,f(-1))$, $(0,f(0))$ *y* $(1,f(1))$.

**Solución.** Hay tres casos por considerar.
*Caso* $x>0$: En este caso $f(x)=x^2$, luego $f'(x)=2x$.
*Caso* $x<0$: Aquí $f(x)=x^3$, por lo tanto $f'(x)=3x^2$.
*Caso* $x=0$: En este caso no podemos aplicar ninguna regla de derivación, pues se cambia de función cerca de 0. Debemos calcular el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}.$$

Si $h<0$, $f(h)=h^3$ y si $h>0$, $f(h)=h^2$, de modo que debemos calcular los límites unilaterales,

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(h)}{h} &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\downarrow 0}h=0,\\ \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(h)}{h} &= \lim_{h\uparrow 0}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\uparrow 0}h^2=0.\end{aligned}$$

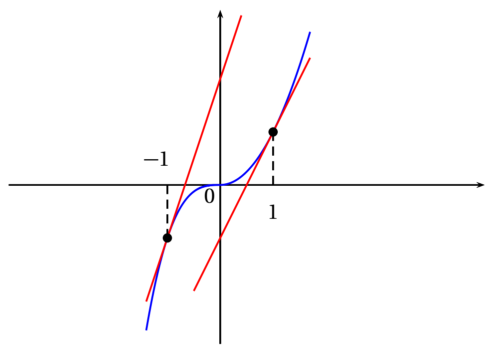
Lo que significa que $f$ es diferenciable en 0 y $f'(0)=0$. Por lo tanto, $D(f')=\mathbb{R}$ y

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0,\\ 3x^2, & x\le 0.\end{cases}$$

Para calcular la recta tangente en los puntos $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$, bastará con conocer la pendiente de dicha recta tangente, pero ésta nos la proporciona la derivada, por ende (ver (7.2)):

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= (x-(-1))f'(-1)+f(-1) \\
&= (x+1)\cdot 3\cdot(-1)^2+(-1)^3 \\
&= 3x+2, \\
L_2(x) &= (x-0)f'(0)+f(0) \\
&= 0, \\
L_3(x) &= (x-1)f'(1)+f(1) \\
&= (x-1)\cdot 2\cdot 1+(1)^2 \\
&= 2x-1.
\end{aligned}$$

Las rectas tangentes se pueden apreciar en la siguiente figura




La recta tangente en 0 no se ve porque es el eje $x$. ■

**Ejercicio 7.1** *Sea $f$ dada por*

$$(a)\ f(x)=\frac{1}{x-2}, \quad (b)\ f(x)=x^6-2x^4, \quad (c)\ f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 0, \\ x^2, & x<0. \end{cases}$$

*Encontrar, para cada inciso, $f'$ y la recta tangente en los puntos* $(a)$ $(-2, f(-2))$, $(b)$ $(0, f(0))$ *y* $(c)$ $(3, f(3))$.

**Ejercicio 7.2** *Encontrar $f'$, en cada caso, (no olvide dar $D(f')$),*

$$(a)\ f(x)=[\![x]\!], \quad (c)\ f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\leq 1, \\ x^2, & x>1, \end{cases}$$

$$(b)\ f(x)=\frac{|x|}{x}, \quad (d)\ f(x)=\begin{cases} |x|, & |x|\leq 1, \\ 2-|x|, & |x|>1. \end{cases}$$

*Trazar la gráfica de $f$ y $f'$, en cada caso.*

**Ejercicio 7.3** *Derivar las siguientes funciones*

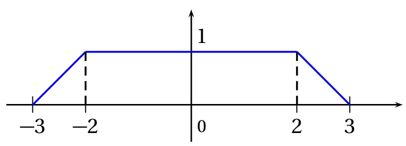
$$(a)\ f(t)=15-18t^4+9t^{12}, \qquad (d)\ r(x)=(9x^3-5x)(5x-1),$$

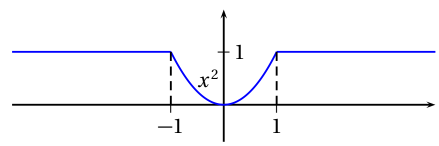
$$(b)\ g(s)=\frac{9s^3-6s-1}{s-1}, \qquad (e)\ p(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4},$$

$$(c)\ u(x)=\frac{(5x^6-87x)(x^2-1)(2x+1)}{x^2+1}, \qquad (f)\ v(k)=\frac{(k^2+5k^{21})(k^3+1)}{k^2+2k+3}.$$

**Ejercicio 7.4** *Halle la recta tangente de la gráfica de* $f(x)=x^{51}-x^2+1$ *en los puntos* $(a)\,(-1,-1)$, $(b)\,(0,1)$.

**Ejercicio 7.5** *Dadas las siguientes gráficas,*




*encontrar* $f'$ *y* $D(f')$.

**Ejemplo 7.8** *Encuentre el punto* $P$ *en la gráfica de* $y=x^3$ *tal que la intercepción de la recta tangente en* $P$ *con el eje* $x$ *sea en* $4$.

**Solución.** Sea $(x_0,y_0)=P$. Entonces $y'=3x^2$, por lo tanto la recta tangente a $P$ está dada por (ver (7.2))

$$L(x)=(x-x_0)3x_0^2+x_0^3.$$

Esta recta debe interceptar al eje $x$ en 4, por ende, $L(0)=4$, es decir

$$4=L(0)=(0-x_0)3x_0^2+x_0^3=-2x_0^3.$$

Por lo tanto $x_0=-\sqrt[3]{2}$. ∎

**Ejercicio 7.6** *Encontrar los puntos* $P$ *en la gráfica de* $y=2x^3+1$ *tal que la intercepción de la recta tangente en* $P$ *con el eje* $y$ *sea en* $-1$.

**Ejercicio 7.7** *Encontrar los puntos* $P$ *en la gráfica de* $y=x^3-x^2+x-1$ *tal que la recta tangente a dicho punto sea paralela a la recta* $8x-4y+1=0$.

**Ejercicio 7.8** *Sean* $f$ *y* $g$ *diferenciables y* $f(2)=3,\ f'(2)=-1,\ g(2)=-5,\ g'(2)=2$. *Encontrar*

$$(a)\ (f-g)'(2), \quad (b)\ \left(\frac{1}{f+g}\right)'(2), \quad (c)\ \left(\frac{f}{f-g}\right)'(2),$$

$$(d)\ \left(f\cdot\frac{1}{f\cdot\frac{1}{g}}\right)'(2), \quad (e)\ \left(\frac{1}{f+\frac{1}{f-\frac{f}{g}}}\right)'(2).$$

### 7.2.2. Regla de la cadena

Hemos notado en la Sección 3.2 que la composición de funciones descompone una función en piezas más fáciles de manipular. La regla de la cadena es una fórmula que indica cómo derivar la composición de funciones.

Para apreciar las bondades de esta nueva regla de derivación consideremos el problema de derivar la función

$$\operatorname{sen}\left(x^2\right).$$

Nos damos cuenta de inmediato que las reglas de derivación aritméticas no se pueden aplicar, necesitamos algo nuevo.

Sean $y = f(u)$, $u = g(x)$, es decir,

$$y = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Si $g$ es diferenciable en $x$ y $f$ diferenciable en $g(x)$, entonces $(f \circ g)$ es diferenciable en $x$ y se cumple

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{7.6}$$

Esta expresión es llamada regla de la cadena (porque se deriva en una secuencia, en una cadena). Dicha fórmula también se expresa así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

**Ejemplo 7.9** *Encontrar la derivada de la función* $\operatorname{sen}\left(x^2\right)$.

**Solución.** Sean $f(u) = \operatorname{sen} u$, $g(x) = x^2$, entonces

$$f'(u) = \cos u, \quad g'(x) = 2x.$$

Por lo tanto

$$(\operatorname{sen}(x^2))' = f'(g(x))g'(x) = \left(\cos x^2\right)(2x).$$

Como se deseaba. ∎

**Ejemplo 7.10** *Encontrar* $\dfrac{dy}{dx}$*, donde* $y = (5x^7 + 8x^2 - 3)^{15}$.

**Solución.** Sean $y = u^{15}$, $u = 5x^7 + 8x^2 - 3$, entonces

$$\frac{dy}{du} = 15u^{14}, \quad \frac{du}{dx} = 35x^6 - 16x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 15u^{14}(35x^6 - 16x) \\ &= 15(5x^7 + 8x^2 - 3)^{14}(35x^6 - 16x). \end{aligned}$$

Es decir $dy/dx = 15x(5x^7 + 8x^2 - 3)^{14}(35x^5 - 16)$. ∎

El lector se dará cuenta de que en el uso de la regla de la cadena no es necesario escribir la composición de funciones, la derivada se calcula de una manera mecánica y natural. Es necesario hacer varios ejercicios para tener esta habilidad mecánica de calcular derivadas. Por ejemplo, la derivada de $(5x^7+8x^2-3)^{15}$, es como derivar $x^{15}$ y luego derivar la base $5x^7+8x^2-3$.

**Ejercicio 7.9** *Derivar las siguientes funciones*

$$(a)\ v(r)=2r(2r+5)^8(2r+4)^{-3},\quad (d)\ F(t)=\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)^8,$$
$$(b)\ f(x)=\operatorname{sen}(x^2+1)^{202},\quad (e)\ g(x)=\operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen}(x^2)^3)^4)^5,$$
$$(c)\ h(x)=\frac{x}{(x^2-4)^8},\quad (f)\ u(x)=\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}x))).$$

**Ejercicio 7.10** *Calcular $k(2)$ y $k'(2)$ suponiendo que $k(x)=f(g(x))$ donde*

$$f(2)=-16,\quad g(2)=2,\quad f'(2)=3,\quad g'(2)=15.$$

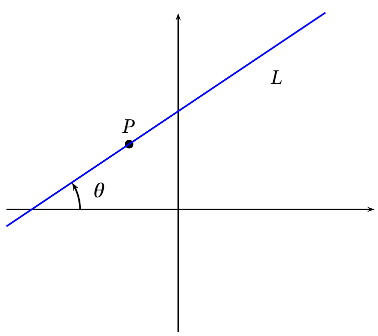
**Ejercicio 7.11** *Sean $w=f(z)$, $z=g(s)$. Si $w=z^{13}-(2/z)$ y $z=(s^{12}+1)^{95}$, encuentre $dw/ds$.*

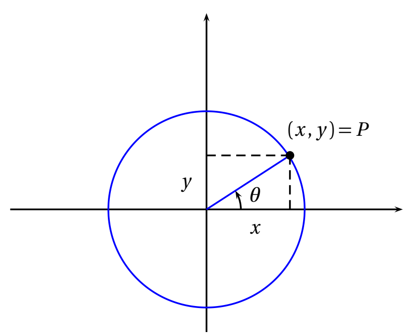
**Ejercicio 7.12** *Sea $a\in\mathbb{R}$ dado. Encontrar $f'$ en términos de $g'$ si*

$$(a)\ f(x)=g(x+g(a)),\quad (c)\ f(x)=g(x\cdot g(a)),\quad (e)\ f(x)=g(x+g(x)),$$
$$(b)\ f(x)=g(x)\cdot(x-a),\quad (d)\ f(x)=g(a)\cdot(x-a),\quad (f)\ f(x+3)=g(x^2).$$

**Ejercicio 7.13** *Sean $x$, $y$, $z$ tres funciones diferenciables de $t$. En cada caso expresar la derivada como función de $x$, $y$, $z$ y de sus derivadas. (a) El producto $xyz$. (b) La composición $x(y(z))$.*

Sea $L(x)=mx+b$ una recta con pendiente $m$ y ordenada al origen $b$. Por otra parte, sea $P=(x,y)$ un punto en la recta y $\theta$ el ángulo que forma la recta con el eje $x$, como se muestra en la primera figura de abajo

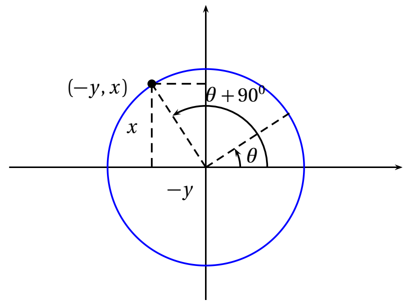



Por lo tanto, trasladando el eje de coordenadas, como se aprecia en la segunda figura de arriba, tenemos que la pendientes es

$$m=\tan\theta=\frac{y}{x}.$$

Si queremos encontrar una recta perpendicular a $L$ en el punto $P$, lo que tenemos que hacer es girar $90^0$ la recta, es decir sumarle $90^0$ al ángulo $\theta$, para obtener:




Así, la pendiente de la recta normal (o perpendicular) a $L$ en el punto $P$ debe tener pendiente

$$\begin{aligned} n &= \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{x}{-y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{m}. \end{aligned}$$

De este modo, la recta normal $L_N$ que pasa por $(x_0, y_0)$ será

$$L_N(x) = -(x-x_0)\frac{1}{m} + y_0. \tag{7.7}$$

**Ejemplo 7.11** *Encontrar la recta normal al punto* $(0.5, f(0.5))$ *donde*

$$f(x) = \cos(x^2-1)^4.$$

**Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen}(x^2-1)^4 4(x^2-1)^3 2x \\ &= -8x(x^2-1)^3 \operatorname{sen}(x^2-1)^4. \end{aligned}$$

De esto $m = f'(0.5) = 0.525$, por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$\begin{aligned} L_N(x) &= -(x-x_0)\frac{1}{f'(x_0)} + f(x_0) \\ &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)(1.904) + 0.950. \end{aligned}$$

Por ende, $L_N(x) = 1.902 - 1.904x$. ■

**Ejercicio 7.14** *Encontrar la recta normal y tangente a la gráfica de la función*

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$$

*en el punto* $(1,32)$.

## 7.3. Derivadas de orden superior

Como hemos visto, al derivar una función $f$ obtenemos otra función $f'$, llamada función derivada de $f$. Obtenida la función $f'$ podemos derivarla de nuevo, como antes, y obtener la función segunda derivada $(f')' = f''$ de $f$. En general, si tenemos la función derivada de orden $n$, o también llamada $n$-ésima derivada de $f$, entonces obtenemos la $n+1$ derivada de $f$ derivando la $n$-ésima derivada de $f$. Algunas notaciones son

$$\begin{gathered} f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \\ D_x f, D_x^2 f,\ D_x^3 f,\ D_x^4, \ldots, D_x^n, \\ \frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \frac{d^4 f}{dx^4}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}. \end{gathered}$$

**Ejemplo 7.12** *Encontrar la tercera derivada de*

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Solución.** Escribimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x^{-1}), \\ f'(x) &= \cos(x^{-1})(-1)x^{-2} = -x^{-2}\cos(x^{-1}), \\ f''(x) &= -[x^{-2}(-\operatorname{sen}(x^{-1}))(-1)x^{-2} + (-2)x^{-3}\cos(x^{-1})] \\ &= 2x^{-3}\cos(x^{-1}) - x^{-4}\operatorname{sen}(x^{-1}), \\ f'''(x) &= 2[x^{-3}(-\operatorname{sen}(x^{-1})(-1)x^{-2} + (-3)x^{-4}\cos(x^{-1})] \\ &\quad -[x^{-4}\cos(x^{-1})(-1)x^{-2} + (-4)x^{-5}\operatorname{sen}(x^{-1})]. \end{aligned}$$

De este modo, $f'''(x) = -2x^{-5}\operatorname{sen}(x^{-1}) + (x^{-6} - 3x^{-4})\cos(x^{-1})$. ■

**Ejemplo 7.13** *Encontrar la derivada $n$-ésima de* $1/x$.

**Solución.** Calculemos primero las cuatro derivadas de $1/x$:

$$\begin{aligned} (x^{-1})^{(1)} &= (-1)\cdot x^{-2}, \\ (x^{-1})^{(2)} &= 1\cdot 2\cdot x^{-3}, \\ (x^{-1})^{(3)} &= -1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}, \\ (x^{-1})^{(4)} &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot x^{-5}. \end{aligned}$$

De esto podemos adivinar que el patrón de iteraciones es

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}. \tag{7.8}$$

Para comprobar esto usemos inducción matemática. Para $n = 1$, el resultado es cierto. Supongamos el resultado cierto para $n$ y veamos que se cumple para $n+1$,

$$(x^{-1})^{(n+1)} = \left(((x^{-1})^{(n)}\right)'$$

$$\begin{aligned}
&= \left((-1)^n n! x^{-(n+1)}\right)' \\
&= (-1)^n n!(-(n+1))x^{-(n+2)} \\
&= (-1)^{n+1}(n+1)! x^{-(n+2)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (7.8) se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$. ∎

**Ejemplo 7.14** *Encontrar $f''$ donde*

$$f(x) = \frac{x + |x+1|}{x^2}.$$

**Solución.** Sea $x \in \mathbb{R}$. Hay tres casos.
*Caso* $x+1>0$ : Es decir $x>-1$ y $x \neq 0$, pues $0 \notin D(f)$. En este caso

$$f(x) = \frac{x+(x+1)}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2},$$

por lo tanto

$$f'(x) = \frac{2x^2-(2x+1)2x}{x^4} = \frac{-2x^2-2x}{x^4} = -\frac{2x+2}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{2x^3-(2x+2)3x^2}{x^6} = -\frac{-4x^3-6x^2}{x^6} = \frac{4x+6}{x^4}.$$

*Caso* $x+1<0$ : En este caso

$$f(x) = \frac{x-(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

de modo que

$$f'(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3},$$

$$f'(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4}.$$

*Caso* $x+1=0$ : Es decir, $x=-1$. Por los dos casos anteriores tenemos que

$$f'(-1+) = -\frac{2(-1)+2}{(-1)^3} = 0, \quad f'(-1-) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1.$$

Esto significa que la función $f'$ no es diferenciable en $-1$. Por lo tanto, $D(f'') = D(f') = \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$ y

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x+2}{x^3}, & x>-1, \quad x \neq 0, \\ \dfrac{2}{x^3}, & x<-1, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+6}{x^4}, & x>-1, \quad x \neq 0, \\ -\dfrac{6}{x^4}, & x<-1. \end{cases}$$

Obteniendo así el resultado buscado. ∎

**Ejercicio 7.15** *Encontrar las primeras cuatro derivadas para (a)* $f(x) = \operatorname{sen}(x+|x|)$*, (b)* $f(x) = \cos(x+|x|)$.

**Ejercicio 7.16** *Encontrar la* $n$*-ésima derivada de las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$.

**Ejercicio 7.17** *Sea* $k \in \mathbb{N}$ *dado. Encontrar condiciones sobre* $a, b \in \mathbb{N}$ *tales que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^a, & x \geq 0, \\ x^b, & x < 0, \end{cases}$$

*tenga derivada de orden* $k$ *en todo* $\mathbb{R}$.

## 7.4. Regla de L'Hospital

Un método para calcular cierto tipo de límites se llama Regla de L'Hospital. Este resultado supone las siguientes hipótesis:
(a) $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $I$, y ocurre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0, \tag{7.9}$$

o bien que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty. \tag{7.10}$$

(b) $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para cada $x \in I \setminus \{a\}$.
(c) $g(x)$ y $g'(x)$ nunca son 0 para cada $x \in I \setminus \{a\}$.
(d) El límite

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.11}$$

existe, donde $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Bajo las condiciones (a)-(d) se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{7.12}$$

existe y es igual a $L$.

Es importante mencionar que si $a \in \mathbb{R}$, entonces el intervalo $I$ del punto (a) puede ser un intervalo abierto y ser $a$ un extremo de éste. Si es así, entonces los límites en (7.9), (7.10), (7.11) y (7.12) son límites unilaterales. Más aún, $a$ puede estar en $\{-\infty, +\infty\}$. Si por ejemplo $a = -\infty$, entonces el intervalo $I$ es de la forma $(-\infty, b)$, para algún $b \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 7.15** *Calcular los límites*

$$(a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad (b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

**Solución.** En cada uno hay indeterminación del tipo $0/0$ y se cumplen las hipótesis de la Regla de L'Hospital, entonces

$$
\begin{aligned}
(a) \quad & \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1,\\
(b) \quad & \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0.
\end{aligned}
$$

Comparar estos límites con los obtenidos anteriormente, ver la Sección 4.3. ■

En ocasiones hay que aplicar la Regla de L'Hospital iteradamente, por ende hay que usar derivadas de orden superior.

**Ejemplo 7.16** *Calcular*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{\tan x - x}.$$

**Solución.** Hay una indeterminación del tipo $0/0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{-2\cos^{-3} x(-\operatorname{sen} x)} = -\frac{1}{2}.$$

Nótese que hemos aplicado dos veces la Regla de L'Hospital. ■

**Ejemplo 7.17** *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+6x+1}{x^3+2x^2-x-1}.$$

**Solución.** Hay una indeterminación del tipo $\infty/\infty$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+6x+1}{x^3+2x^2-x-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-10x+6}{3x^2+4x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{18x-10}{6x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{18}{6} = 3.
\end{aligned}
$$

Aquí hemos aplicando tres veces la regla de L'Hospital. ■

**Ejemplo 7.18** *Calcular*

$$\lim_{x\uparrow 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right).$$

**Solución.** Nótese que

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\infty.$$

Por lo tanto no podemos separar los límites y además tampoco podemos aplicar la Regla de L'Hospital directamente. En este caso realizamos la operación aritmética

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}.$$

Ahora hay una indeterminación del tipo 0/0,

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\operatorname{sen}x}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\operatorname{sen}x}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x-x\operatorname{sen}x+\cos x}=0.$$

Aquí hemos aplicado dos veces la Regla de L'Hospital. ■

Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}.$$

Del Ejemplo 4.9 sabemos que

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0,$$

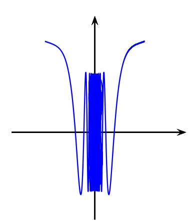
por lo tanto, el Ejemplo 7.15 implica que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}=0.$$

Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\operatorname{sen}(1/x))'}{(\operatorname{sen}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}$$

no existe, pues la función $[2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)]/\cos x$ oscila demasiado cerca de 0, ver abajo su gráfica



Lo anterior significa que el recíproco de la Regla de L'Hospital no es cierta, es decir, si el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, esto no implica que exista el límite de

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cabe señalar que en la aplicación de la Regla de L'Hospital es la derivada del numerador entre la derivada del denominador, no la derivada del cociente. Este error se comete muy frecuentemente. El siguiente ejemplo aclara el punto. Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1. \tag{7.13}$$

Pero nótese que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-2)^2}=0.$$

Lo que es contrario a (7.13).

**Ejercicio 7.18** *Calcular los siguientes límites*

$$\begin{array}{lll}
(a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right), & (e)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\tan 3x}, & (i)\ \lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}, \\
(b)\ \lim_{x\to 0}(\csc x-\cot x), & (f)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right), & (j)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cot x-1/x}{x^2}, \\
(c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right), & (g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}, & (k)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8x+2x+1}{x^4-x^2+2x-3}, \\
(d)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}, & (h)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right), & (l)\ \lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x).
\end{array}$$

# Capítulo 8

# Primeras aplicaciones y derivación implícita

En este capítulo presentamos algunas interpretaciones y aplicaciones del concepto de derivada. Entre las interpretaciones están, por ejemplo, el concepto de tasa de cambio y de velocidad instantánea. Además, veremos el concepto de derivación implícita y cómo se vincula éste, de manera sorprendente, con ciertos problemas prácticos.

## 8.1. La derivada como razón de cambio

La importancia del concepto de derivada es debido a sus múltiples aplicaciones. En esta sección discutiremos las primeras de ellas. Para abordar estas aplicaciones necesitamos darle una interpretación "práctica" a este concepto. Con esto iniciamos.

Supongamos que $t \geq 0$ representa el tiempo y $y = f(t)$ representa cierta expresión que indica la evolución (en el tiempo) de alguna cantidad. El cambio medio (o promedio) de la cantidad de interés, $y$, en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ es dada por

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}. \tag{8.1}$$

La cantidad (8.1) también se interpreta como una tasa (razón o velocidad) media. La tasa (razón o velocidad) instantánea de variación en el punto $t$ es

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

En lo que sigue presentamos algunos ejemplos donde introducimos otras interpretaciones del concepto de derivada.

**Ejemplo 8.1** *El radio de un globo esférico aumenta a ritmo de* 2 *cm por segundo. ¿Cuál es la tasa de variación del volumen del globo en el instante en que su radio mide* 10 *cm?*

**Solución.** Sabemos que el volumen de una esfera de radio $r$ está dado por la expresión, $v = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por lo tanto, la tasa de variación (instantánea) es

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}\\ &= 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Se sabe que $\frac{dr}{dt} = 2$ cm/seg, por ende la tasa de variación del volumen del globo, cuando $r = 10$ cm, es

$$\frac{dv}{dt}(10) = 4\pi\,(10)^2\cdot 2 = 800\,\pi\,\frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}.$$

De esta manera, la tasa de variación del volumen del globo en el instante en que su radio mide 10 cm es de $2,513.274$ cm$^3$/seg. ∎

**Ejemplo 8.2** *Una fábrica de quesos calcula que el costo de producir $x$ quesos está dado por la función*

$$c(x) = 180 + 0.08x + 0.07x^2 - 0.0001x^3.$$

*Calcular el costo, el costo medio y el costo marginal (instantáneo) para la producción de* 600, 400 *y* 300 *quesos. Comparar el costo marginal por la producción de* 400 *quesos, con el costo de producir el queso 401.*

**Solución.** El costo medio por pieza de queso es de

$$\frac{c(x)}{x} = \frac{180}{x} + 0.08 + 0.07x - 0.0001x^2,$$

y el costo marginal es

$$c'(x) = 0.08 + 0.14x - 0.0003x^2.$$

El costo marginal se interpreta como una tasa de cambio de costo con respecto a los quesos fabricados. Con esta información llenamos la tabla

| Quesos | Costo | Costo medio | Costo marginal |
|---|---|---|---|
| 600 | 3,828 | 6.38 | -23.92 |
| 400 | 5,012 | 12.53 | 8.08 |
| 300 | 3,804 | 12.68 | 45.08 |

Por otra parte, el costo de producir el queso 401 es

$$c(401) - c(400) = 5,020 - 5,012 = 8$$

y el costo marginal es $c'(400) = 8.08$. ∎

Supongamos que $s(t)$ representa la posición de una partícula que se mueve en línea recta al tiempo $t$. La derivada

$$v(t) = s'(t)$$

se llama velocidad de la partícula en el instante $t$. Si $v(t)$ es diferenciable, entonces la derivada

$$a(t) = v'(t)$$

se llama aceleración de la partícula en el instante $t$.

**Ejemplo 8.3** *Un objeto se está moviendo en línea recta y su distancia al origen al tiempo $t$ está dada por la función*

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 6t.$$

*Describir el comportamiento del objeto en el intervalo de tiempo* $[-1, 5]$.

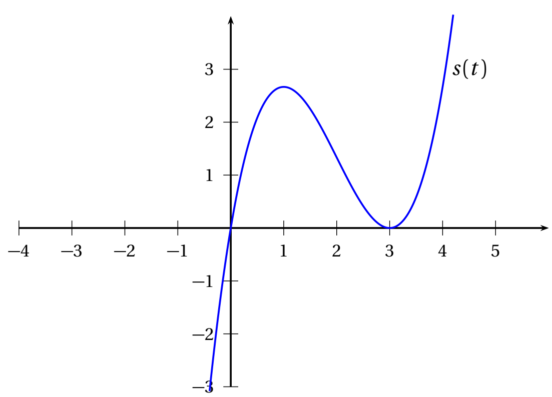
**Solución.** La velocidad del objeto es

$$v(t) = s'(t) = 2t^2 - 8t + 6 = 2(t-1)(t-3).$$

Por lo tanto, la velocidad es 0 en 1 y 3 segundos, lo que significa que el objeto se detuvo. Antes de 1 segundo la velocidad es positiva, es decir, la distancia al origen crece, después se detiene, en $t = 1$, y luego la velocidad es negativa, lo que significa que la distancia del objeto al origen decrece y luego se detiene, en $t = 3$, para enseguida crecer de nuevo. Lo anterior se justifica analizando los signos de la derivada

$$\begin{aligned}
-1 \le t < 1 \Rightarrow 1 - t \ge 0,\ 3 - t \ge 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{sig}(2(t-1)(t-3)) = +, \text{ pues} ++ = +,\\
1 \le t \le 3 \Rightarrow 1 - t < 0,\ 3 - t \ge 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{sig}(2(t-1)(t-3)) = -, \text{ pues} -+ = -,\\
3 \le t \le 5 \Rightarrow 1 - t \le 0,\ 3 - t \le 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{sig}(2(t-1)(t-3)) = +, \text{ pues} -- = +.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $a(t) = 4t - 8 = 2(t-2)$. Esto significa que en $t = 2$ no hubo aceleración, es decir, la “velocidad instantánea fue constante”. La gráfica de $s$ es




Observe que en 1 y 3 segundos el movimiento del objeto cambió de dirección. ∎

**Ejercicio 8.1** *Si un automóvil parte del reposo, ¿qué aceleración constante le permitirá recorrer* 180 *m en* 10 *s si a los* 4 *s lleva una velocidad de* 6 $m/s$*?*

**Ejercicio 8.2** *Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una velocidad constante de 12 km/h y a una distancia de la costa de 4 km. ¿Cuál es su velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que diste precisamente 5 km del faro?*

**Ejemplo 8.4** *Se dispara una pistola directamente hacia arriba desde el suelo. Su distancia sobre el suelo a los $t$ segundos es de $41t - 4.9t^2$ metros. ¿Cuál es la velocidad del proyectil en $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$ y $t = 5$ segundos? ¿En qué momento alcanza su altura máxima? ¿Cuándo choca con el suelo? ¿Cuál es la velocidad en el momento del choque?*

**Solución.** La velocidad es $v(t) = 41 - 9.82t$. Por lo tanto

| Tiempo $t$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Velocidad $v(t)$ | 21.36 | 11.54 | 1.72 | -8.1 |

Vemos que en 5 segundos la bala ya viene de regreso (por el signo negativo). De modo que la altura máxima se alcanza entre los segundos 4 y 5. Más precisamente, cuando la velocidad es cero,

$$v(t) = 41 - 9.82t = 0,$$

es decir, a los 4.175 segundos. Si tarda lo mismo en subir que en bajar, entonces a los 8.35 segundos chocará con el suelo. La velocidad en el momento del choque es

$$v(8.35) = 41 - 9.82(8.35) = -41.$$

Que es la misma velocidad con la que salió la bala, pero en dirección contraria. ∎

**Ejercicio 8.3** *Un fabricante de pantalones estima que el costo de producir $x$ pantalones por día está dado por*

$$c(x) = 1002 + 26x - x^2/11, \quad 0 \leq x \leq 200.$$

*Hallar el costo marginal de la producción de* 10 *pantalones y compararlo con el costo real de producir el pantalón número* 11.

**Ejercicio 8.4** *Un objeto se mueve a lo largo del eje $y$. Su posición en el instante $t$ está dada por*

$$s(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 6, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

*Estudiar las siguientes cuestiones:*

(a) *Determinar la velocidad $v$.*

(b) *Factorizar a $v$ para ver cuándo se mueve hacia arriba o hacia abajo.*

(c) *Calcular los instantes en los que el objeto se detiene.*

(d) *Calcular el punto donde la velocidad es constante (para esto hay que encontrar la aceleración).*

**Ejercicio 8.5** *Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba. Su altura sobre el suelo $s(t)$ (en metros) a los $t$ segundos está dada por $s(t) = 168t - 19t^2$. $(a)$ ¿Cuál es la velocidad y cuál es la aceleración a los $t$-segundos? $(b)$ ¿Cuáles a los* 3 *segundos? $(c)$ ¿Cuál es la altura máxima? $(d)$ ¿Cuándo llega al suelo?*

**Ejercicio 8.6** *En cierta fábrica el costo total de $n$ unidades está dado por*

$$C(n) = \frac{1}{5}n^2 + 3n + 800.$$

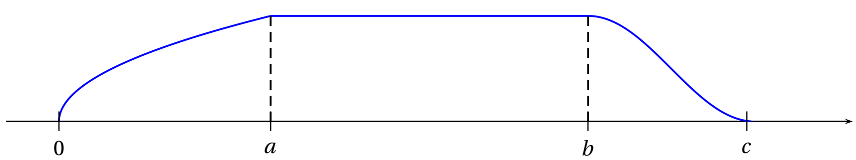
*Además, el número de unidades que se producen por hora es de acuerdo a la función*

$$n(t) = 4t^2 + 35t, \quad t \geq 0.$$

*Determinar la intensidad de cambio del costo total con respecto a un tiempo de* 3 *horas después de haberse iniciado la producción.*

**Ejercicio 8.7** *Verifique que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie.*

**Ejercicio 8.8** *Un cohete se lanza al espacio desde el suelo. Sea $s(t)$ la distancia del cohete al suelo. Si la gráfica de la velocidad $v(t) = s'(t)$ del cohete es*




(a) *¿Cuál es el intervalo de tiempo en el que se puede caminar con seguridad dentro del cohete?*

(b) *¿En qué intervalos de tiempo se aleja o se acerca?*

(c) *¿En qué momento alcanza su altura máxima?*

## 8.2. Incrementos y diferenciales

Un concepto que suele resultar útil en aplicaciones es el de diferencial.
Sea $h > 0$. El número

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

se llama incremento de $f$ de $x$ a $x+h$. Si $f$ es diferenciable en $x$ el producto $hf'(x)$ se llama diferencial de $f$ en $x$ con incremento $h$ y se denota por

$$df(x) = hf'(x).$$

Si $h = dx$, entonces $df(x) = f'(x)dx$. Puesto que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h},$$

entonces de manera intuitiva podemos decir que $f'(x)$ es aproximadamente igual a $\Delta f(x)/h$, si $h$ es muy pequeño. Por lo tanto

$$df(x) = hf'(x) \approx h\left(\frac{\Delta f(x)}{h}\right) = \Delta f(x).$$

De este modo

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x). \tag{8.2}$$

Este cálculo, aunque sencillo, suele ser útil.

**Ejemplo 8.5** *Calcular el valor aproximado de* $\sqrt[3]{8.001}$.

**Solución.** Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. De (8.2)

$$\begin{aligned} f(8+0.001) &\approx f(8) + 0.001\frac{1}{3}(8)^{-2/3} \\ &= 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(0.001) = 2.000083. \end{aligned}$$

Donde hemos tomado $x = 8,\ h = 0.001$. ■

**Ejercicio 8.9** *Usar diferenciales para estimar*

$$(a)\ \sqrt[4]{15}, \quad (b)\ \sqrt[3]{28}, \quad (c)\ \cos(58^0), \quad (d)\ \operatorname{sen}(46^0).$$

**Ejercicio 8.10** *Hallar el volumen aproximado de un recipiente esférico, cuyo radio exterior es de* 4 *cm y cuyo espesor de* 0.25 *cm.*

**Ejercicio 8.11** *Se desea recubrir una cúpula semiesférica, de radio de 15 m, con una capa de pintura de 0.03 cm de grosor. Se quiere saber cuántos litros de pintura se necesitará. Obtener una estimación mediante diferenciales.*

## 8.3. Derivación implícita

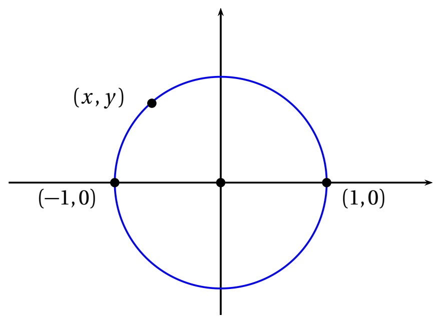
Hasta ahora hemos estudiado funciones definidas explícitamente, es decir, dado un valor $x$ (llamada variable independiente) obtenemos, bajo cierta asignación otro valor $y$ (llamada variable dependiente). Esto lo hemos denotamos por $y = f(x)$ y hemos supuesto que $f$ es la regla o la fórmula que nos indica qué operación debemos hacer con $x$.

Otra manera de definir una función es de forma implícita, es decir, de manera indirecta. Un método usual para hacer esto es a través de una ecuación. Esto significa que dada $x$, el valor que le asignamos a $y$ depende de que éste sea solución de una ecuación. El problema radica en que la ecuación en cuestión puede tener más de una solución, si esto ocurre no tendremos una función, pues dada $x$ no sabremos qué valor asignarle a $y$ (hay una indeterminación). El siguiente ejemplo nos muestra esta situación y una manera de resolver este problema.

**Ejemplo 8.6** *Estudiar las funciones implícitas definidas por la ecuación*

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{8.3}$$

**Solución.** La relación (8.3) consiste en todas aquellas parejas $(x, y)$ de números reales que cumplen la ecuación (8.3). Al graficar estos puntos en el plano cartesiano nos damos cuenta de que se trata de un círculo con centro en $(0,0)$ y radio uno




De esto observamos que los posibles valores de $x$ están en el intervalo $[-1,1]$. De modo que para cada $x \in [-1,1]$ buscamos un único $y = f(x)$ tal que

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2.$$

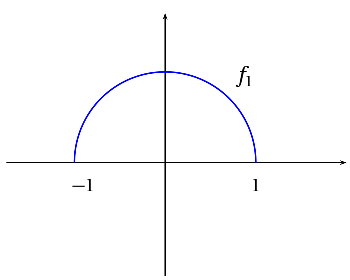
Observamos que hay dos posibilidades

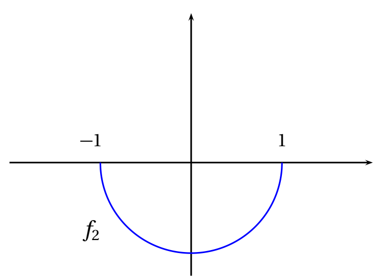
$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{1-x^2}. \tag{8.4}$$

Así, la ecuación (8.3) nos define dos funciones implícitamente

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Es de esperar que las gráficas de $f_1$ y $f_2$ tengan la forma




Es importante señalar que éstas son las dos únicas funciones continuas que se obtienien de la ecuación (8.3), sin embargo, hay otras posibilidades, por ejemplo

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x < 0, \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

también es una función definida implícitamente por (8.3), excepto que ahora no es continua. Es discontinua en 0. ∎

En ocasiones no es posible despejar la variable $y$ como en (8.4). Sin embargo, bajo el supuesto de que la ecuación en cuestión define al menos una función implícita podemos encontrar su derivada. De hecho, en cálculo de varias variables hay un resultado (llamado teorema de la función implícita) que afirma que, bajo ciertas condiciones, una ecuación siempre define una función de manera “local ”.

**Ejemplo 8.7** *Bajo el supuesto que la ecuación*

$$y^3 + 3y^2x - x^4 + y = 1, \tag{8.5}$$

*define una función $y = f(x)$ implícitamente, encontrar su derivada.*

**Solución.** De (8.5) tenemos

$$(f(x))^3 + 3(f(x))^2 x - x^4 + f(x) = 1.$$

Derivando la ecuación con respecto a $x$, nos queda,

$$\frac{d}{dx}\left[(f(x))^3 + 3(f(x))^2 x - x^4 + f(x)\right] = \frac{d}{dx}1,$$

usando la regla de la cadena

$$3(f(x))^2 \frac{d}{dx} f(x) + 3\left[2(f(x))\frac{d}{dx} f(x) + (f(x))^2\right] - 4x^3 + \frac{d}{dx} f(x) = 0.$$

Factorizando $df(x)/dx$,

$$\frac{d}{dx} f(x)[3(f(x))^2 + 6f(x) + 1] = 4x^3 - 3(f(x))^2,$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{4x^3 - 3(f(x))^2}{3(f(x))^2 + 6f(x) + 1}. \tag{8.6}$$

Obteniendo lo deseado. ∎

La derivada que se obtiene al derivar una función implícita se llama derivada implícita de $f$ con respecto a $x$.

Otra forma simbólica de hacer la derivación implícita es la siguiente. Derivamos la variable $y$, siguiendo las reglas usuales, y cada vez que se derive $y$ la multiplicamos por $y'$. Por ejemplo, la derivada implícita de (8.5) es

$$3y^2y' + 3[2yy' + y^2] - 4x^3 + 1 \cdot y' = 0,$$

despejamos $y'$, para obtener

$$y' = \frac{4x^3 - 8y^2}{3y^2 + 6y + 1}. \tag{8.7}$$

Lo cual coincide con (8.6) si recordamos que $y = f(x)$.

Veremos, en la siguiente sección, que la derivación implícita tiene muchas aplicaciones.

**Ejemplo 8.8** *Encontrar la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación (8.5) en el punto* $(1,-2)$.

**Solución.** De (8.6) obtenemos que

$$f'(1)=\frac{4(1)^3-3(-2)^2}{3(-2)^2+6(-2)+1}=-8.$$

Por lo tanto, de (7.2) vemos que la recta tangente es

$$y=(x-1)(-8)-2=6-8x,$$

y la recta normal es

$$y=(x-1)\left(\frac{1}{8}\right)-2=\frac{1}{8}x-\frac{17}{8},$$

aquí hemos usado (7.7). ∎

**Ejemplo 8.9** *Encontrar la derivada implícita de* $y$, *donde*

$$\tan^2(xy^2)+2x^3y=5x.$$

**Solución.** Usando las reglas usuales, y escribiendo $y'$ cuando se derive con respecto a $y$, queda

$$2\tan(xy^2)\frac{1}{\cos^2(xy^2)}(x(2y)y'+y^2)+2(x^3y'+3x^2y)=5,$$

despejando

$$y'=\frac{(5-6x^2y)\cos^2(xy^2)-2y^2\tan(xy^2)}{4xy\tan(xy^2)+2x^3\cos^2(xy^2)}.$$

Obteniendo así lo deseado. ∎

**Ejemplo 8.10** *Hallar* $y''$ *donde*

$$y^4+3y-4x^3=5x+1.$$

**Solución.** La primera derivada es

$$4y^3y'+3y-12x^2=5.$$

La segunda derivada

$$4[y^3y''y'+3y^2(y')^2]+3y''y-24x=0.$$

Factorizando $y''$,

$$y''[4y^3y'+3y']=24x-12y^2(y')^2$$

por lo tanto,

$$y''=\frac{24x-12y^2(y')^2}{4y^3y'+3y'}.$$

Recordemos que cada vez que derivamos $y$ multiplicamos por $y'$. ■

La derivación implícita se puede usar para calcular derivadas de potencias fraccionarias. Sean $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Consideremos la ecuación

$$y^m - x^n = 0. \tag{8.8}$$

Dependiendo de $m$ y $n$, esta ecuación define implícitamente a lo más dos funciones continuas

| | $n$ par | $n$ impar |
|---|---|---|
| $m$ impar | $y = (x^n)^{1/m},\ x \in \mathbb{R},$ | $y = (x^n)^{1/m},\ x \in \mathbb{R},$ |
| $m$ par | $y = (x^n)^{1/m},\ x \in \mathbb{R},$<br>$y = -(x^n)^{1/m},\ x \in \mathbb{R},$ | $y = (x^n)^{1/m},\ x \geq 0,$<br>$y = -(x^n)^{1/m},\ x \geq 0.$ |

Derivando implícitamente (8.8) nos queda

$$m y^{m-1} y' - n x^{n-1} = 0,$$

por lo tanto, usando (8.8)

$$y' = \frac{n x^{n-1}}{m y^{m-1}} = \frac{n x^{n-1}}{m y^m y^{-1}} = \frac{n x^{n-1} y}{m x^n} = \frac{n}{m}\frac{y}{x}.$$

Para obtener la derivada de $y$ hay que tomar la función $y$ adecuada. Por ejemplo, si $m$ es impar,

$$y' = \frac{n}{m}\frac{(x^n)^{1/m}}{x} = \frac{n}{m} x^{n/m-1}.$$

Expresiones análogas se abtienen si $m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

**Ejemplo 8.11** *Encontrar la derivada implícita de*

$$\sqrt[4]{y^3} + \sqrt[3]{x}\, y = \frac{2}{\sqrt{x^3}} + \sqrt[3]{5x^2 - x + 4}, \qquad y \geq 0.$$

**Solución.** Escribamos primero esta expresión en términos de potencias fraccionarias

$$y^{3/4} + x^{1/3} y = 2x^{-3/2} + (5x^2 - x + 4)^{1/3}.$$

Derivando, bajo el supuesto de que esto es posible,

$$\frac{3}{4} y^{-1/4} y' + x^{1/3} y' + \frac{1}{3} x^{-2/3} y = -2 \cdot \frac{3}{2} x^{-5/2} + \frac{1}{3}(5x^2 - x + 4)^{-2/3}(10x - 1).$$

Despejando $y'$, queda

$$y' = \frac{(1/3)(5x^2 - x + 4)^{-2/3}(10x - 1) - (1/3)x^{-2/3} y - 3x^{-5/2}}{(3/4)y^{-1/4} + x^{1/3}}.$$

Obteniendo así el resultado deseado. ■

**Ejercicio 8.12** *Encontrar $y$, $y'$ de las funciones definidas implícitamente por:*

$$\begin{array}{llll} (a) & y^4 - x^4 = 0, & (d) & y^4 - x^2 = 0, \\ (b) & y^5 - x^4 = 0, & (e) & y^5 - x^3 = 0, \\ (c) & y^4 - x^5 = 0, & (f) & y^5 - x^5 = 0. \end{array}$$

## 8.4. Rapidez (o tasas) de variación relacionadas

En esta parte veremos aplicaciones de las derivadas implícitas. Al tratar problemas prácticos frecuentemente aparecen dos variables que dependen de una tercera, la cual generalmente es el tiempo. Es decir, tenemos algo como

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \quad t \geq 0.$$

Más aún, las variables $x, y$ están relacionadas por alguna ecuación.

Por ejemplo, supongamos que $x, y$ dependen del tiempo $t$ y están relacionadas por la ecuación

$$x^2 - y^3 - xy + 1 = 0. \tag{8.9}$$

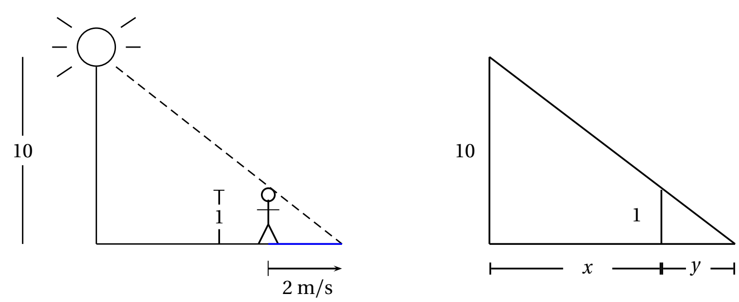
Derivando, implícitamente con respecto a $t$, nos queda

$$2x\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0.$$

Nótese que al derivar $x$ o $y$ siempre multiplicamos por $\frac{dx}{dt}$ o $\frac{dy}{dt}$, según sea el caso. Las cantidades $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se llaman rapidez (o tasas) de cambio relacionadas.

**Ejemplo 8.12** *Un foco se encuentra en lo alto de un poste de* 10 *m de altura. Un niño de* 1 *m de estatura se aleja del poste a una velocidad de* 2 *metros por segundo. ¿Cuál es la taza de crecimiento de su sombra? ¿Con qué velocidad se mueve el extremo de su sombra cuando el niño se encuentra a los* 12 *m?*

**Solución.** Tenemos un esquema como éste




Usando las propiedades entre los triángulos semejantes (ver (15.5)) resulta

$$\frac{x+y}{10} = \frac{y}{1}. \tag{8.10}$$

De aquí, $y = \frac{1}{9}x$. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{9}\frac{dx}{dt}.$$

Es decir, la tasa de crecimiento de la sombra, $y$, es de

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{9} \text{ m/s}\cdot$$

Por otra parte, la velocidad del extremo de la sombra, con respecto al poste, es de

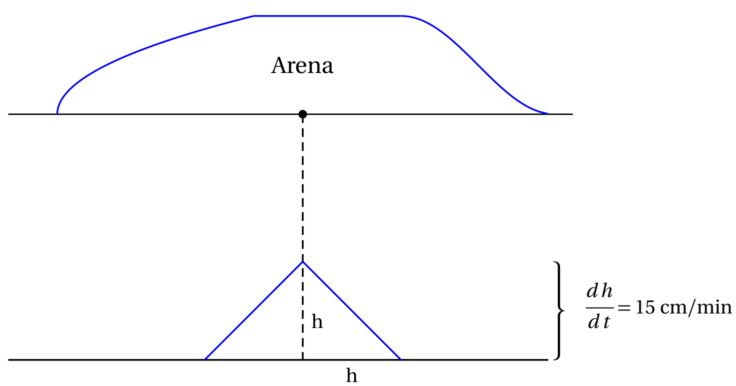
$$\frac{d(x+y)}{dt} = \frac{d}{dt}(9y+y) = 10\frac{dy}{dt} = \frac{20}{9} \text{ m/s.}$$

Nótese que la velocidad no depende de la posición del niño, es decir de los 12 m. La velocidad del extremo de su sombra depende únicamente de la tasa del crecimiento de ésta. ∎

Como se habrá apreciado, al resolver el problema anterior primero identificamos todos los datos con los que se cuenta, enseguida tratamos de encontrar una fórmula (o fórmulas) (ver (8.10)) que relacione las cantidades de interés. Este paso es crucial y se sugiere poner especial atención en este punto en los ejemplos que siguen. El tercero y último paso es derivar implícitamente para encontrar las razones o tasas pedidas.

**Ejemplo 8.13** *La arena que escurre por un agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de* 25 *cm esta aumenta a razón de* 15 *cm/min. Calcule el volumen de arena que sale del agujero por minuto cuando la altura es de* 25 *cm.*

**Solución.** Hagamos un esquema para concentrar los datos



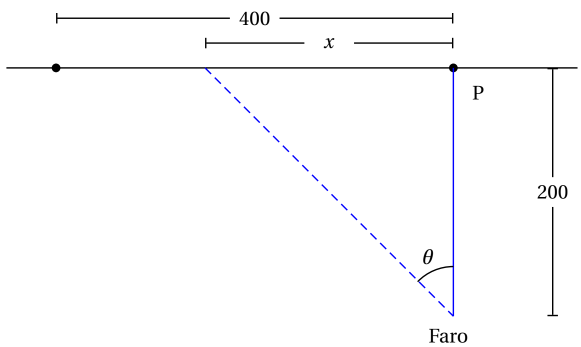

El volumen de arena que sale del agujero es el mismo volumen que hace que el cono aumente de tamaño. El volumen del cono de arena que se forma es $V = \frac{1}{3}\pi h^3$. Por lo tanto

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}\cdot$$

A los 25 cm de altura el volumen de arena que sale por el agujero será de $\pi(25)^2 15 = 0.029$ m$^3$/seg. ∎

**Ejemplo 8.14** *Un faro que se encuentra a* 200 *m del punto más cercano* $P$ *de una costa, con forma de línea recta, gira dando una vuelta completa cada* 15 *segundos. Calcular la velocidad con la que el haz de luz se mueve al pasar por un punto a* 400 *m del punto P.*

**Solución.** Hagamos un esquema




Nótese que en un minuto se dará 4 vueltas. Por lo tanto, el ángulo habrá recorrido $8\pi$ radianes, es decir

$$\frac{d\theta}{dt} = 8\pi \text{ rad/min.}$$

Puesto que

$$\tan(\theta) = \frac{x}{200},$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = 200\ \sec^2(\theta)\ \frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $x = 400$ el ángulo recorrido será

$$\tan(\theta) = \frac{400}{200} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2) = 1.107 \text{ rad.}$$

En consecuencia

$$\frac{dx}{dt}(400) \approx 200 \times 5 \times 8\pi.$$

Es decir, la velocidad será de $25,132.741$ m/min. ■

**Ejercicio 8.13** *Una escalera de* 4 *metros de largo está apoyada contra la pared de una casa de tres pisos de altura. La base de la escalera se resbala a razón* 0.5 *m/seg. ¿Con qué velocidad se desliza el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a* 3 *metros del suelo?*

**Ejercicio 8.14** *Una bola de nieve se derrite de manera que su radio disminuye con velocidad constante, de* 30 *a* 20 *centímetros en* 45 *minutos. ¿Cuál es la velocidad del cambio de volumen en el momento en que el radio medía* 25 *centímetros?*

**Ejercicio 8.15** *Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de* 18 *m de alto y* 8 *m de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de* 10 *litros por minuto, encontrar la velocidad de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es de* 4 *m.*

**Ejercicio 8.16** *Suponga que el segmento de recta que va del inicio de una pista de aviones a una torre de control es perpendicular a la pista. Suponga además que el inicio de la pista está a una distancia de* 500 *m de la base de la torre de control y que un avión alcanza una velocidad de* 500 *km/h después de recorrer* 800 *m sobre la pista. Calcular la rapidez de cambio de la distancia entre el avión y la cabina de la torre que está situada a* 70 *m del suelo.*

# Capítulo 9

# Implicaciones geométricas de la derivada

En esta parte veremos cómo el concepto de derivada nos ayuda a estudiar las propiedades geométricas de las funciones.

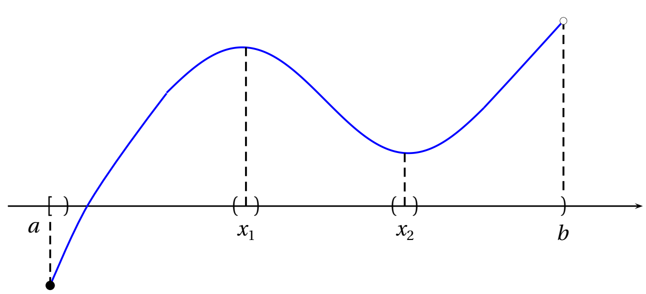
## 9.1. Extremos de una función

Sea $I$ un intervalo (que podría ser cerrado, abierto o una combinación de ambos) y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos $x_0 \in I$ es un punto máximo (mínimo) local de $f$ si existe un intervalo $J \subset I$ tal que

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0)), \quad \forall x \in J.$$

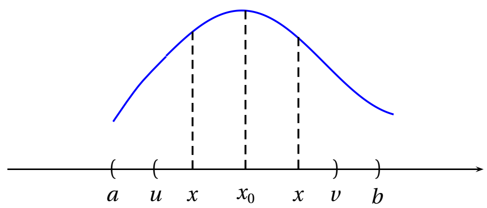
Se dice que $f(x_0)$ es un valor máximo (mínimo) local de $f$. El punto $x_0$ se llama extremo local.

Supongamos que la gráfica de una función $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ tiene la forma




En este caso $x_1$ y $x_2$ son extremos locales, $x_1$ es un máximo local y $x_2$ es un mínimo local. Es importante notar que $a$ es un mínimo local, pero $b$ no es un máximo local, pues $b$ no está en el dominio de $f$.

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$ un máximo local de $f$. Supongamos que la gráfica de $f$ es suave. Algo así como la figura de abajo




Sea $(u,v)$ un intervalo tal que

$$f(x)\le f(x_0),\quad \forall x\in(u,v),$$

entonces

$$f(x)-f(x_0)\le 0,\quad \forall x\in(u,v).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0, \quad \text{si} \quad x>x_0, \tag{9.1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \quad \text{si} \quad x<x_0. \tag{9.2}$$

Las desigualdades (9.1) y (9.2) implican

$$\begin{aligned} f'(x_0+) &= \lim_{x\downarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,\\ f'(x_0-) &= \lim_{x\uparrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0. \end{aligned}$$

Si $f$ es diferenciable en $x_0$, entonces

$$0\le f'(x_0-)=f'(x_0)=f'(x_0+)\le 0,$$

es decir, $f'(x_0)=0$. Así tenemos el teorema de los extremos, o de Fermat:

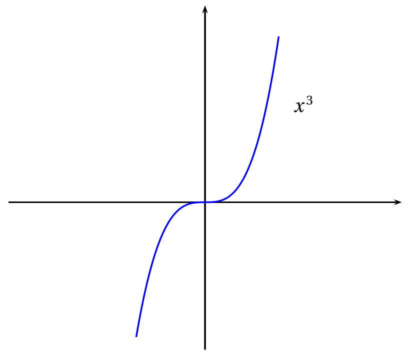
**Teorema 9.1** *Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0\in(a,b)$ y $x_0$ es un extremo local, entonces $f'(x_0)=0$.*

**Definición 9.1** *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ con $x_0\in I$. Si $f'(x_0)=0$, entonces se dice que $x_0$ es un punto crítico. El número $f(x_0)$ se llama valor crítico.*

Del teorema anterior deducimos que si $f$ es diferenciable en $x_0$ y $x_0$ es un extremo local, entonces $x_0$ es un punto crítico. El recíproco de esta afirmación es falso. Por ejemplo, la función $f(x)=x^3$ cumple que

$$f'(0)=0,$$

por lo tanto 0 es un punto crítico, pero 0 no es punto extremo. Esto se aprecia en la figura de abajo



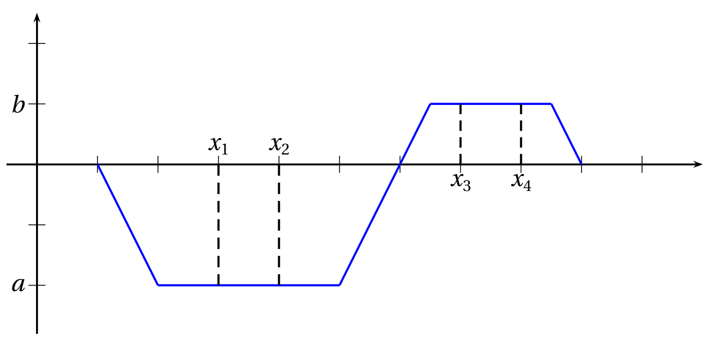

Más adelante discutiremos sobre este tipo de puntos (ver el Ejemplo 9.6).

**Definición 9.2** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ cumple que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in I,$$

*se dice que $x_0$ es un máximo (mínimo) global de $f$ sobre $I$.*

Por ejemplo, el punto $a$ en la figura de la página 107 es un mínimo global en $[a, b)$ y $f$ no tiene máximos globales. Los valores extremos son únicos, pero no los puntos donde se alcanzan. En efecto, si una función $f$ tiene una gráfica de la forma




entonces los números $b$ y $a$ son los valores máximos y mínimos globales, respectivamente. El valor mínimo $a$ se alcanza, por ejemplo, en $x_1$ y $x_2$, y el valor máximo $b$ se alcanza, por ejemplo, en $x_3$ y $x_4$.

**Ejercicio 9.1** *El capital de cierta compañía en un año se calcula de acuerdo a la función $f(t) = 0.05t^5 + a\,t^3 + b\,t + 4.3$, $t \geq 0$. Dar condiciones sobre los parámetros $a$ y $b$ de modo que el capital nunca esté por abajo del capital inicial.*

## 9.2. Un método para encontrar extremos de una función

A continuación proponemos una técnica para encontrar los valores extremos de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (en particular será fácil si $f$ es diferenciable). Para encontrar los extremos globales de $f$ en $[a,b]$ seguimos estos pasos:

(a) Calcular $f(a)$ y $f(b)$.

(b) Encontrar los puntos y valores críticos de $f$.

(c) Evaluar la función en aquellos puntos donde $f$ no es diferenciable.

Para fijar las ideas presentamos varios ejemplos.

**Ejemplo 9.1** *Sea $f(x)=x^3-x$. Encontrar los extremos de $f$ en $[-1,2]$.*

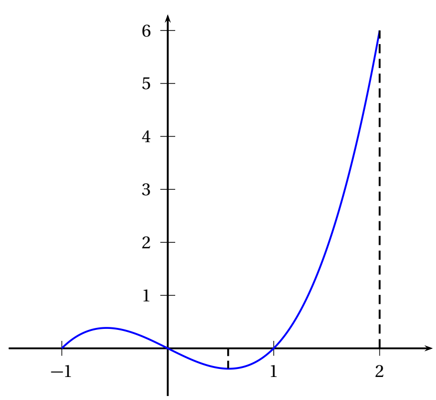
**Solución.** Consideremos los pasos $(a)$ y $(b)$.
(a) $f(-1)=0, \quad f(2)=6.$
(b) Es claro que $f'(x)=3x^2-1$. Haciendo

$$3x^2-1=0,$$

resulta que $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ son los puntos críticos. Los valores críticos son

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Puesto que $f$ es diferenciable en $(-1,2)$ no tiene sentido considerar el caso (c). Para apreciar los extremos hacemos la gráfica de $f$



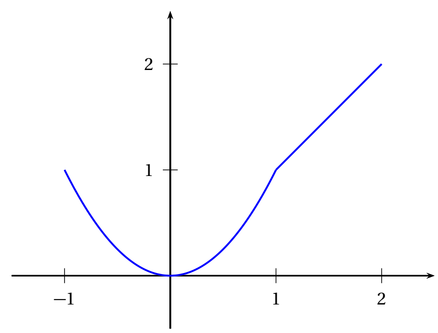

De los valores obtenidos vemos que en 2 se alcanza el máximo y en $1/\sqrt{3}$ el mínimo. Observe en particular que $1/\sqrt{3}$ es un punto crítico y 2 no lo es. ∎

**Ejemplo 9.2** *Sea $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, dada por*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[-1,1),\\ x, & x\in[1,2].\end{cases} \tag{9.3}$$

*Encontrar los extremos locales de $f$ en $[-1,2]$.*

**Solución.** Analizaremos los casos del método.
(a) $f(-1)=1,\ f(2)=2$.
(b) La derivada de $f$ es, $f'(x)=2x,\ x\in(-1,1),\ f'(x)=1,\ x\in(1,2)$. Por lo tanto el único punto crítico es 0. El valor crítico es 0.
(c) El único punto en $(-1,2)$ donde $f$ no es diferenciable es 1. En este caso $f(1)=1$. Trazamos la gráfica de $f$ para apreciar sus extremos




Comparando los valores obtenidos en $(a)$, $(b)$ y $(c)$ vemos que 0 es el valor mínimo y 2 es el valor máximo. ■

**Ejercicio 9.2** *Encontrar los extremos de*

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1/2],\\ 1-x, & x\in(1/2,1],\end{cases}$$

*en $[0,1]$.*

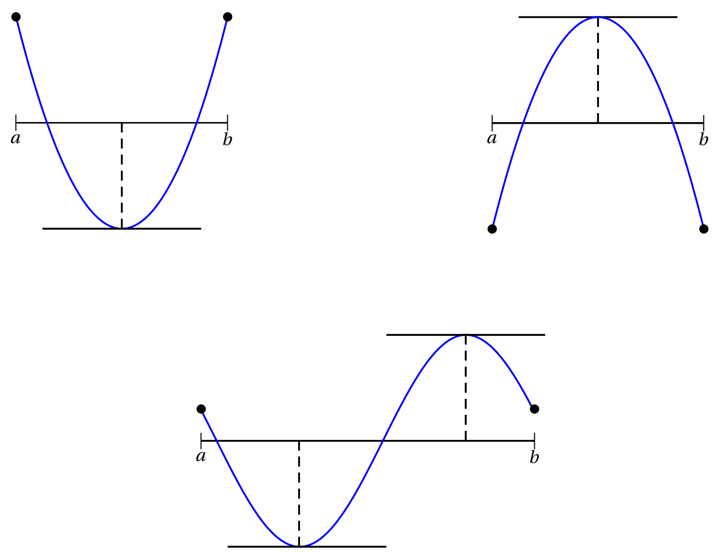
**Ejercicio 9.3** *Sea $f(x)=(1-x^2)^{-1}$. Encontrar los extremos de $f$ en $(-1,1)$.*

El ejercicio precedente nos da la oportunidad para recordar que las funciones continuas en intervalos cerrados tienen extremos; sin embargo, las funciones continuas en intervalos abiertos no necesariamente.

## 9.3. Teorema del valor medio

En esta sección continuamos con el estudio de las implicaciones geométricas del concepto de derivada. Le hemos concedido una sección aparte a un resultado teórico que tiene consecuencias importantes en las aplicaciones teóricas y prácticas, a saber el Teorema del Valor Medio.

Iniciemos con un caso particular. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$. Supongamos que $f(a) = f(b)$. Algunas posibles opciones para la gráfica de $f$ son las siguientes




En ellas vemos que existe al menos un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Es decir, existe al menos un punto en $(a,b)$ donde la pendiente de la recta tangente es cero. Además, se aprecia que este punto es un extremo local. Este hecho, es decir, la existencia de al menos un punto crítico en $(a,b)$, es cierto en general y se llama Teorema de Rolle, veamos cuál es su justificación. Por ser $f$ continua en $[a,b]$, sabemos (ver la página 71) que existen $m, M \in [a,b]$ tal que $f$ alcanza su mínimo y su máximo, respectivamente. Tenemos por lo tanto las siguientes posibilidades.
*Caso* $m \in (a,b)$ o $M \in (a,b)$: Por el Teorema de Fermat sabemos que

$$f'(m) = 0 \quad \text{o} \quad f'(M) = 0.$$

*Caso* $m, M \in \{a,b\}$: Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(a) = f(m)$ y $f(b) = M$. Si $x \in (a,b)$, entonces

$$f(a) = f(m) \leq f(x) \leq f(M) = f(b) = f(a),$$

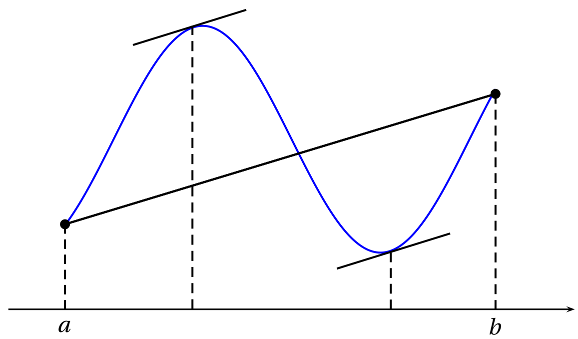
así $f(x) = f(a)$, para cada $x \in [a,b]$. Por ende, en este caso cualquier punto $x \in (a,b)$ cumple que $f'(x) = 0$.

Una versión más general es el siguiente resultado, conocido como Teorema del Valor Medio:

**Teorema 9.2** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$. Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{9.4}$$

Con la finalidad de interpretar el resultado precedente consideremos el siguiente esquema:




De la figura observamos que en el intervalo $(a,b)$ hay (por lo menos) un punto en el cual la recta tangente en él tiene la misma pendiente que el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Con la finalidad de comprobar este hecho consideremos la función

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b].$$

Nótese que $h$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$. Además

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

El Teorema de Rolle nos asegura que existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $h'(x_0) = 0$, de lo cual se sigue la afirmación (9.4).

**Ejercicio 9.4** *Verificar que todo polinomio de grado* 3 *puede tener* 0, 1 *o* 2 *valores críticos.*

**Ejemplo 9.3** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$. Si $f'(x) =$ 0, para cada $x \in (a,b)$, entonces $f$ es constante en $[a,b]$.*

**Solución.** Sea $x \in (a,b]$. Consideremos la función $f : [a,x] \to \mathbb{R}$, entonces por (9.4) existe $y \in (a,x)$ tal que

$$0 = f'(y) = \frac{f(x)-f(a)}{a-x}.$$

Por lo tanto $f(x) = f(a)$, para cada $x \in (a,b]$. Es decir, $f$ es la función constante $f(a)$. ∎

**Ejemplo 9.4** *Todo polinomio de grado* 3 *tiene a lo más tres raíces.*

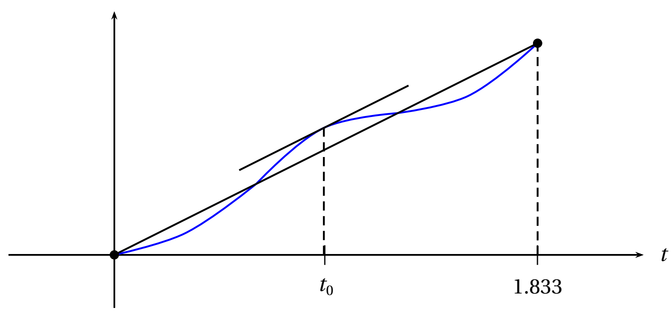
**Solución.** Sea $p$ un polinomio de grado 3. Si $p$ tiene $k > 3$ raíces, por el Teorema de Rolle, entre cada dos raíces hay un punto crítico, por lo tanto, $p$ tendría $k-1 > 2$ puntos críticos. Esto contradice lo establecido en el Ejercicio 9.4. ■

**Ejemplo 9.5** *Un automovilista que viaja de Aguascalientes a Guadalajara hace* 1 *hora con* 50 *minutos. La distancia entre estas ciudades es de* 240 *kilómetros. Si el límite de velocidad es de* 110 *km/hr, ¿debe o no ser multado el conductor?*

**Solución.** Primero notemos que 50 min corresponden a 0.833 hrs. Por lo tanto, el tiempo del viaje es de 1.833 horas. Sea $s(t)$ la distancia recorrida al tiempo $t$. La velocidad promedio es de

$$\frac{s(1.833)-s(0)}{1.833} = \frac{240}{1.833} \approx 130.1 \text{ km/hr.}$$

Un posible esquema para $s(t)$ sería así




Por el Teorema del Valor Medio existe un $t_0 \in (0, 1.833)$ tal que

$$s'(t_0) \approx 130.1 \text{ km/hr.}$$

Es decir, en $t_0$ horas el conductor viajaba a más de 130 km/hr, por lo tanto rebasó el límite de velocidad y debe ser multado. ■

**Ejercicio 9.5** *Si* $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, *verifique que las hipótesis del Teorema del Valor Medio se satisfacen para* $a = 1$ *y* $b = 3$. *Hallar todos los números* $c \in (1,3)$ *tales que*

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}.$$

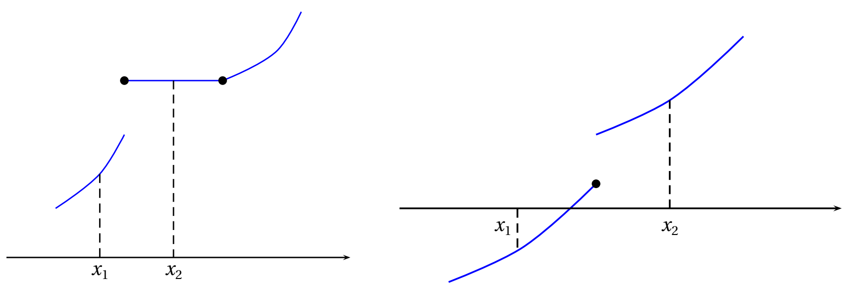
**Ejercicio 9.6** *Si* $f(x) = x^{2/3}$, *muestre que no existe un número* $c \in (-2,2)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}.$$

*¿Qué hipótesis del Teorema del Valor Medio no se cumplen para* $f$ *en el intervalo* $[-2,2]$*?*

## 9.4. Funciones monótonas

Sea $I$ un intervalo (que podría ser todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$). Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice creciente (decreciente) en $I$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Cuando la desigualdad $f(x_1) \leq f(x_2)$ es estricta, es decir, $f(x_1) < f(x_2)$, entonces decimos que $f$ es estrictamente creciente (estrictamente decreciente). Este concepto tiene una interpretación geométrica clara, la primera gráfica de abajo representa una función creciente y la segunda una función estrictamente creciente




Si $f$ es una función creciente o decreciente se dice que $f$ es una función monótona.

**Ejemplo 9.6** *Verificar que $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$.*

**Solución.** Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Queremos comprobar que $x_2^3 \geq x_1^3$. Usando una de las factorizaciones que aparecen en la Sección 15.5, esto es equivalente a

$$(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = x_2^3 - x_1^3 \geq 0.$$

Debido a que $x_2 - x_1 > 0$ la desigualdad anterior es equivalente a

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 \geq 0. \tag{9.5}$$

Si (9.5) fuese falsa, es decir si

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 < 0, \tag{9.6}$$

entonces sumando en ambos lados $x_2 x_1$ resultaría

$$0 \leq (x_2 - x_1)^2 = x_2^2 + 2x_2 x_1 + x_1^2 < x_2 x_1 \Rightarrow x_2 x_1 > 0.$$

Ahora, sumando $x_2^2 + x_1^2$ en ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 > x_2^2 + x_1^2 \geq 0.$$

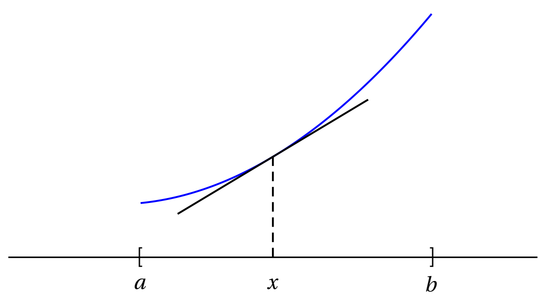
Lo que contradice (9.6). Por lo tanto la desigualdad (9.5) es verdadera. Así hemos verificado que $f$ es creciente. ■

Del ejemplo anterior deducimos que 0 no puede ser un punto extremo (ver la gráfica de $f$ en la página 109), sin importar que sea un punto crítico. También hemos aprendido que no es fácil verificar la monotonía (si aún hay duda, el lector podría intentar mostrar que $f(x)=x^7$ es creciente, usando sólo la definición).

**Ejercicio 9.7** *Haga un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones para determinar aquellos conjuntos donde sea monótona, verificar usando la definición:*

$$(a)\ x-[\![x]\!],\quad (c)\ (x+2)^3-4,\quad (e)\ (x-1)^2+2,$$
$$(b)\ x+2,\quad (d)\ x^2,\quad (f)\ x^2+2x.$$

Como veremos en seguida, el concepto de derivada es particularmente útil para determinar la monotonía de una función. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$. Supongamos que en cada punto $x\in(a,b)$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x,f(x))$ es no negativa. La gráfica de una función con esta propiedad se verá así




Es decir, la gráfica de $f$ en ningún punto baja, pues si lo hiciera entonces la pendiente de la recta tangente sería negativa. De esto deducimos que la función es creciente. En efecto, sean $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$. Por el Teorema del Valor medio, aplicado a $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$, resulta que existe $x\in(x_1,x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x)\geq 0. \tag{9.7}$$

Esto implica que

$$f(x_2)\geq f(x_1).$$

En resumen, $f$ es creciente si $f'\geq 0$. Si la desigualdad en (9.7) es estricta para cada $x\in(a,b)$, entonces $f$ es estrictamente creciente. Análogamente, si la desigualdad en (9.7) es de la forma

$$f'(x)\leq 0,\quad \forall x\in(a,b),$$

entonces $f$ es decreciente, y si la desigualdad es estricta, entonces $f$ es estrictamente decreciente.

Como hemos discutido, algunos párrafos atrás, la detección de la monotonía nos permitirá determinar si los puntos críticos son extremos locales. Este resultado, que enunciamos a continuación, se suele llamar criterio de la primera derivada.

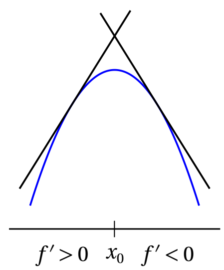
**Teorema 9.3** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Sea $x_0\in(a,b)$, $\delta>0$ tal que $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$. Tenemos los siguientes casos:*

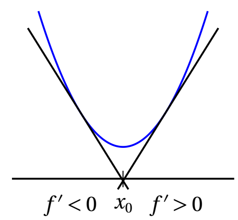
($a$) *Si $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$, y $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, entonces $x_0$ es un punto máximo local.*

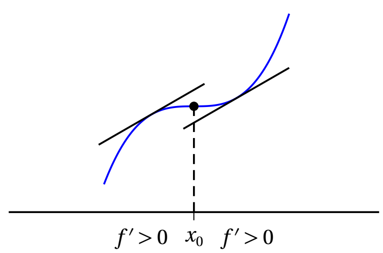
($b$) *Si $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$, y $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, entonces $x_0$ es un punto mínimo local.*

($c$) *Si $f'$ no cambia de signo, entonces $x_0$ no es un extremo.*

A continuación representamos geométricamente los tres casos:




En el primero $x_0$ representa un máximo, en el segundo un mínimo y en el tercero no es extremo local, en este caso la derivada a la derecha y a la izquierda de $x_0$ es positiva, es decir, no cambió de signo.

Verifiquemos el caso ($a$). Por ser $f$ creciente en $(x_0-\delta,x_0)$ y continua en $x_0$, resulta que

$$f(x)\le f(x_0),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0).$$

Análogamente, por ser $f$ decreciente en $(x_0,x_0+\delta)$ y continua en $x_0$,

$$f(x_0)\ge f(x),\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta).$$

De este modo se concluye que $x_0$ es un punto máximo local. Los casos restantes se analizan de manera similar.

**Ejemplo 9.7** *Encontrar los extremos locales de*

$$(a) \quad f(x) = x^{1/3}(8-x), \qquad (b) \quad f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5.$$

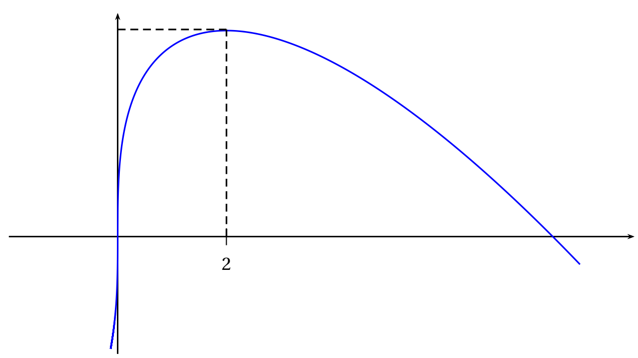
**Solución.** El objetivo es determinar los signos de la derivada de $f$.
Para el caso (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}(8-x) - x^{1/3} \\ &= \frac{8}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{1/3} - x^{1/3} = \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

De aquí vemos que 2 es un punto crítico y $f$ no es diferenciable en 0. Esto indica que debemos considerar el signo de $f$ en los intervalos $(-\infty,0),(0,2)$ y $(2,\infty)$. Recuerde que $x^{2/3} = (x^{1/3})^2 > 0,\ x \neq 0$. Esto significa que el signo de $f'$ lo determina el numerador en (9.8), pues el denominador siempre es positivo.
*Caso* $x \in (-\infty,0)$: $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.
*Caso* $x \in (0,2)$: $0 < x < 2 \Rightarrow 0 > -x > -2 \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.
*Caso* $x \in (2,\infty)$: $x > 2 \Rightarrow 0 > 2 - x \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.
Con esta información llenamos la tabla

| Intervalo | $(-\infty,0)$ | $(0,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $f'$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| Comportamiento de $f$ | creciente | creciente | decreciente |

De esto deducimos que 0 no es un extremo local, pues no hay cambio en el signo de $f'$ y 2 es un máximo local pues $f'$ cambió de $+$ a $-$. Más aún, podemos hacer un boceto de la gráfica de $f$




El valor máximo local es

$$f(2) = 2^{1/3}(8-2) \approx 7.6.$$

Para el caso (b) tenemos

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5.$$

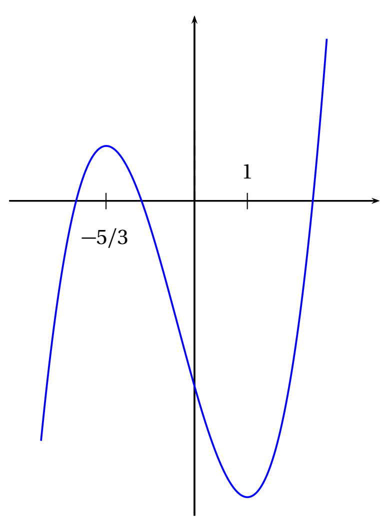
Factorizamos $f'$ para encontrar los puntos críticos (ver cómo se factoriza un binomio al cuadrado en la Sección 15.4)

$$f'(x) = (3x+5)(x-1).$$

Por lo tanto, $-5/3$ y $1$ son los puntos críticos de $f$. Para determinar el signo de $f'$ consideremos los intervalos $(-\infty, -5/3), (-5/3, 1)$ y $(1, \infty)$.
*Caso* $x \in (-\infty, -5/3)$: $x < -5/3 \Rightarrow 3x < -5 \Rightarrow 3x - 5 < 0$ y $x < -5/3 < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$. Puesto que $-$ por $-$ es $+$, entonces $f'(x) > 0$.
*Caso* $x \in (-5/3, 1)$: $-5/3 < x < 1 \Rightarrow -5 < 3x \Rightarrow 0 < 3x + 5$ y $x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$. Debido a que $+$ por $-$ es $-$, entonces $f'(x) < 0$.
*Caso* $x \in (1, \infty)$: $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ y $x > 1 > -5/3 \Rightarrow 3x > -5 \Rightarrow 3x + 5 > 0$. Puesto que $+$ por $+$ es $+$, entonces $f'(x) > 0$.
Esta información la concentramos en la tabla

| Intervalo | $(-\infty, -5/3)$ | $(-5/3, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $f'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| Comportamiento de $f$ | creciente | decreciente | creciente |

De ella podemos auxiliarnos para trazar la gráfica de $f$




En $-5/3$ la derivada cambia de signo de $+$ a $-$, por lo tanto $-5/3$ es un máximo local, con valor

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{5}{3}\right) - 5 = \frac{40}{27}.$$

Por otra parte, en 1 la derivada cambia de signo de $-$ a $+$, por lo tanto 1 es un mínimo local, con valor

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 - 5 = -8.$$

En la gráfica anterior se puede apreciar el comportamiento de las pendientes cercanas a los extremos. ■

Como hemos visto, el concepto de derivada nos permite dar un bosquejo de la gráfica de una función. A continuación resumimos algunos pasos que es conveniente seguir:

(a) Calcular los puntos y valores críticos de $f$.

(b) Encontrar el signo de $f'$ en los intervalos inducidos por los puntos críticos.

(c) Las raíces de $f$ (si es posible).

(d) Calcular las asíntotas de $f$.

**Ejemplo 9.8** *Trazar la gráfica de*

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

**Solución.** Nótese que $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, además

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \tag{9.9}$$

$(a)$ Los puntos singulares son 0 y 2. Los valores críticos son

$$f(0)=-2, \quad f(2)=2.$$

$(b)$ Puesto que $f$ no está definida en todo el intervalo $(0,2)$, el signo de $f$ debe determinarse por separado en $(0,1)$ y en $(1,2)$. Desde luego, también hay que considerar los intervalos $(-\infty,1)$ y $(2,\infty)$. Como el denominador en (9.9) es positivo, el signo de $f'$ lo determina el numerador.
*Caso* $x\in(-\infty,0)$: $x<0 \Rightarrow x-2<-2<0$. Por lo tanto, $f'(x)>0$.
*Caso* $x\in(0,1)$: $0<x<1 \Rightarrow x<1<2 \Rightarrow x-2<0$. Esto implica que, $f'(x)<0$.
*Caso* $x\in(1,2)$: $1<x<2 \Rightarrow 0<x$ y $x-2<0$. En consecuencia, $f'(x)<0$.
*Caso* $x\in(2,\infty)$: $x>2>0 \Rightarrow x-2>0$. Por lo tanto, $f'(x)>0$.
Condensamos esta información en la tabla

| Intervalo | $(-\infty,0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $f'$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Comportamiento de $f$ | creciente | decreciente | decreciente | creciente |

$(c)$ Las raíces de $f$ son aquellas $x\in\mathbb{R}$ tales que

$$x^2-2x+2=0.$$

Pero esta ecuación tiene discriminante negativo (ver la Sección 15.4)

$$b^2-4ac=(-2)^2-4(2)=-4<0,$$

por lo tanto $f$ nunca toca el eje $x$ (no hay raíces).
$(d)$ Haciendo la división de $x^2-2x+2$ entre $x-1$, nos queda

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}. \tag{9.10}$$

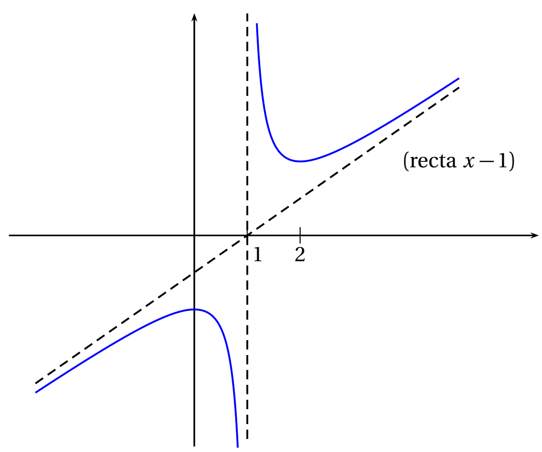
Notamos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

Por lo tanto $x-1$ es una asíntota oblicua y de (9.10) obtenemos

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\uparrow 1} f(x)=-\infty,$$

es decir, 1 es una asíntota vertical.
Con esta información podemos hacer un boceto de la gráfica de $f$ así




De ella podemos apreciar que hay dos extremos globales, 0 y 2, máximo y mínimo, respectivamente. ■

**Ejercicio 9.8** *Trazar la gráfica de las siguientes funciones haciendo uso del método descrito en esta sección:*

$$(a)\ f(x)=x^{4/5}(x^2-4), \quad (b)\ g(x)=\frac{x^2+2x-2}{2-x}, \quad (c)\ h(x)=\frac{1-x}{7x^2+2x+2}.$$

# Capítulo 10

# Trazado de gráficas

En este capítulo se introduce el concepto de concavidad y se estudia cómo se relaciona éste con el concepto de derivada. Aplicamos estos objetos matemáticos en el boceto de la gráfica de una función.

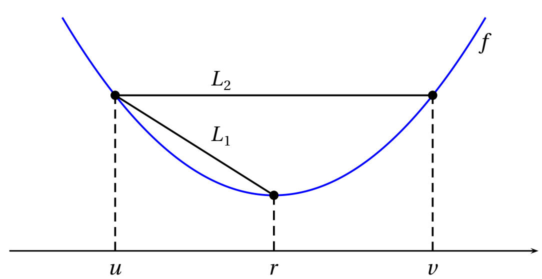
## 10.1. Funciones convexas

Enseguida iniciamos definiendo el concepto de concavidad.

**Definición 10.1** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ un intervalo. Decimos que $f$ es convexa en $I$ si para cualesquiera $u, v \in I$, $u < v$ y $r \in (u, v)$ la pendiente $m_{L_1}$, del segmento $L_1$, que une los puntos $(u, f(u)), (r, f(r))$ es menor que la pendiente $m_{L_2}$, del segmento $L_2$, que une los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$, es decir*

$$m_{L_1} = \frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = m_{L_2}. \tag{10.1}$$

Una representación gráfica de este concepto es de la siguiente forma




Nótese que (10.1) es equivalente a

$$(f(r) - f(u))(v - u) \leq (f(v) - f(u))(r - u),$$

$$f(r)v - f(u)v - f(r)u + f(u)u \leq f(v)r - f(u)r - f(v)u + f(u)u,$$

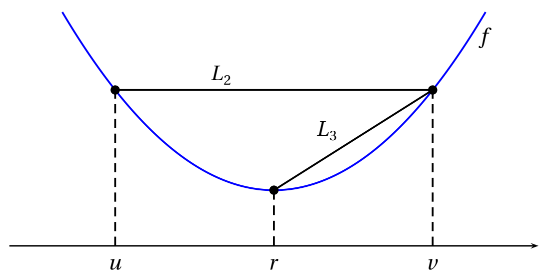
cancelando $uf(u)$ y sumando en ambos lados $-f(v)v$, nos queda

$$\begin{aligned} f(r)v - f(u)v - f(r)u - f(v)v &\leq f(v)r - f(u)r - f(v)u - f(v)v, \\ f(r)v - f(r)u + f(v)u - f(v)v &\leq f(u)v - f(u)r + f(v)r - f(v)v, \\ f(r)(v-u) + f(v)(u-v) &\leq f(u)(v-r) + f(v)(r-v), \\ f(r)(v-u) - f(v)(v-u) &\leq f(u)(v-r) - f(v)(v-r), \\ (f(r) - f(v))(v-u) &\leq (f(u) - f(v))(v-r), \end{aligned}$$

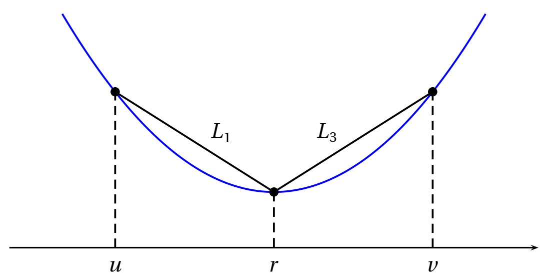
multiplicando por $-1$ y dividiendo, resulta

$$m_{L_2} = \frac{f(v) - f(u)}{v-u} \leq \frac{f(v) - f(r)}{v-r} = m_{L_3}. \tag{10.2}$$

Esto significa que la pendiente del segmento $L_2$ que une $(u, f(u))$ con $(v, f(v))$ es menor que la pendiente del segmento $L_3$ que une $(r, f(r))$ con $(v, f(v))$, como se aprecia en la siguiente figura




Más aún, nótese que la pendiente del segmento $L_1$ es menor que la pendiente del segmento $L_3$, ver la figura de abajo




En efecto, (10.1) y (10.2) implican

$$m_{L_1} \leq m_{L_2} \leq m_{L_3}. \tag{10.3}$$

**Ejercicio 10.1** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ convexa. Sean $u, v \in I$, $u < v$. Verificar que*

$$f(tu+(1-t)v) \leq tf(u)+(1-t)f(v), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{10.4}$$

**Ejercicio 10.2** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa. Verificar que*

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \quad \forall x \in [a,b].$$

**Ejercicio 10.3** *Estudiar la convexidad de*

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

*en* $(0,\infty)$.

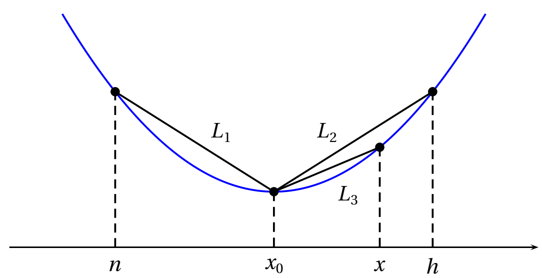
Se tiene también que si una función $f$ cumple (10.4), entonces $f$ es convexa. Esto significa que el segmento que une los puntos $(u, f(u))$, $(v, f(v))$ siempre está por encima de la gráfica de la función en el intervalo $(u, v)$.

Si $-f$ es convexa, entonces decimos que $f$ es cóncava.

La propiedad básica de las funciones convexas es el siguiente resultado.

**Teorema 10.1** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ convexa (o cóncava), entonces $f$ es continua en $(a,b)$.*

Para comprobar este resultado consideremos un punto arbitrario fijo $x_0 \in (a,b)$. Sea $a < x_0 < x < b$. Así, tendremos un esquema como el siguiente




De (10.3) resulta que $m_{L_1} \leq m_{L_3}$, por otra parte, de (10.1) deducimos que $m_{L_3} \leq m_{L_2}$. Por lo tanto

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}.$$

Multiplicando estas desigualdades por $x-x_0$ y sumando $f(x_0)$, resulta

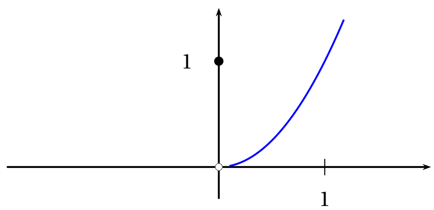
$$f(x_0)+\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)+\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}(x-x_0).$$

Al tomar límites nos queda, $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. De manera análoga podemos verificar que $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Por lo tanto $f$ es continua en $x_0$. Por ser $x_0$ arbitrario tenemos la continuidad de $f$ en $(a,b)$.

Nótese que no podemos cambiar $(a,b)$ por $[a,b]$ en el teorema anterior. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x=0, \\ x^2, & \text{si } x\in(0,1], \end{cases}$$

con gráfica




Es claro, de (10.4), que $f$ es convexa pero no es continua, es discontinua en 0.

## 10.2. Relación entre convexidad y diferenciabilidad

Al hacer el Ejercicio 10.3 se puede apreciar que verificar convexidad puede ser un poco complicado, si sólo se usa la definición. Veremos que el concepto de derivada es muy útil para determinar concavidad.

**Teorema 10.2** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diferenciable en $(a,b)$ y $f'$ creciente, entonces $f$ es convexa.*

En efecto, sean $u,v\in(a,b)$, arbitrarios, con $u<v$ y $r\in(u,v)$. Por el Teorema de Valor Medio aplicado a los intervalos $(u,r)$, $(r,v)$ existen $x\in(u,r)$, $y\in(r,v)$ tales que

$$f'(x)=\frac{f(r)-f(u)}{r-u}, \quad f'(y)=\frac{f(v)-f(r)}{v-r}.$$

Puesto que $f'$ es creciente, entonces $f'(x)\le f'(y)$, es decir

$$\frac{f(r)-f(u)}{r-u}\le\frac{f(v)-f(r)}{v-r}.$$

De esto deducimos las siguientes equivalencias

$$(f(r)-f(u))(v-r)\le(f(v)-f(r))(r-u),$$

$$f(r)v-f(u)v-f(r)r+f(u)r\le f(v)r-f(r)r-f(v)u+f(r)u,$$

sumando $-f(u)u$ en ambos lados

$$f(r)v-f(u)v+f(u)r-f(u)u\le f(v)r-f(v)u+f(r)u-f(u)u,$$

factorizando

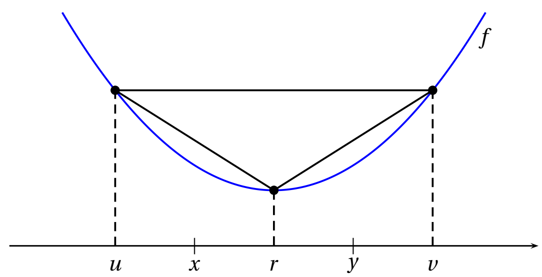
$$v(f(r)-f(u))+f(u)(r-u)\le f(v)(r-u)+u(f(r)-f(u))$$

$$(f(r)-f(u))(v-u) \leq (r-u)(f(v)-f(u)),$$

nos queda

$$\frac{f(r)-f(u)}{r-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}.$$

Es decir, la pendiente del segmento que une los puntos $(u, f(u))$, $(r, f(r))$ es menor que la pendiente del segmento que une los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$, como se aprecia en la figura

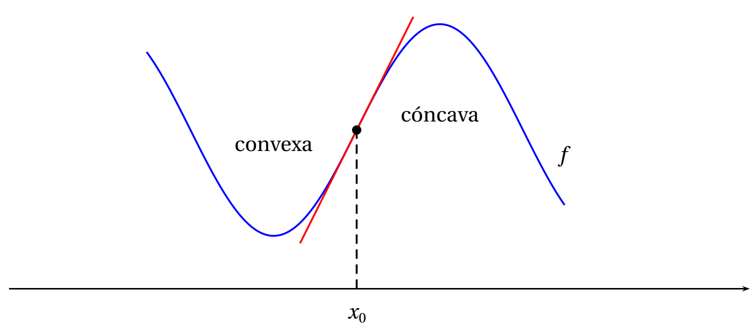



De este modo hemos verificado (10.1), por lo tanto $f$ es convexa.

Es claro que si $f'$ es decreciente, entonces $f$ es cóncava.

Supongamos que $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ cumple que $f''(x) = (f')'(x) > 0$, para cada $x \in (a,b)$. De lo discutido en la página 116 deducimos que $f'$ es creciente, por lo tanto $f$ es convexa. Este hecho se conoce como el criterio de la segunda derivada para verificar concavidad.

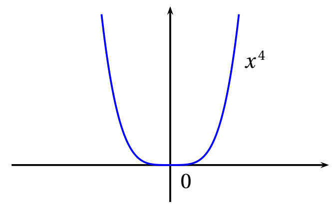
Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in (a,b)$ se llama punto de inflexión de $f$ si la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ cruza la gráfica. En este punto la gráfica de $f$ cambia de concavidad, como se aprecia en la figura de abajo




De la figura precedente podemos apreciar que si $f''$ existe entonces $f''(x) > 0$, si $x < x_0$ y $f''(x) < 0$ si $x > x_0$, pues antes de $x_0$ es convexa, y después de $x_0$ es cóncava. Esto implica que si $x$ se aproxima a $x_0$, entonces $f''(x_0) = 0$. Es decir, si $x_0$ es un punto de inflexión y $f''$ existe entonces $f''(x_0)=0$. El recíproco de esta afirmación es falso. Por ejemplo, para la función $f(x)=x^4$, tenemos que

$$f''(x)=12x^2, \quad f''(0)=0,$$

sin embargo 0 no es punto de inflexión, ver la figura de abajo




En efecto, $f(x)=x^4$ siempre es convexa, no cambia de concavidad.

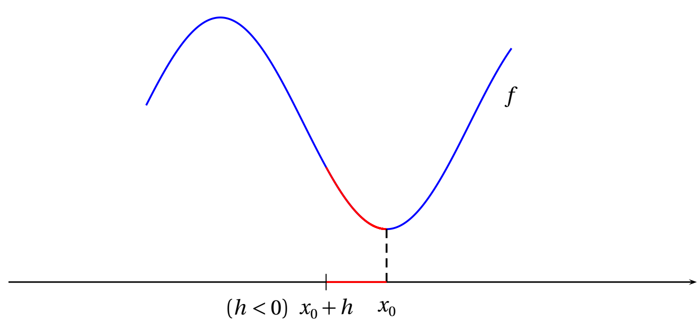
Al estudiar extremos de una función suele ser conveniente usar el siguiente resultado, conocido como criterio de la segunda derivada para extremos locales.

**Teorema 10.3** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$. Si $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), entonces $x_0$ es un mínimo (máximo) local.*

Para verificar este hecho recordemos que

$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}.$$

Si $f''(x_0)>0$, entonces $f'(x_0+h)$ y $h$ deben tener el mismo signo. Si $h<0$, entonces $f'(x_0+h)<0$, es decir $f'$ es negativa un poco antes de $x_0$, por lo tanto $f$ es decreciente un poco antes de $x_0$. Tendremos algo así




Análogamente, si $h>0$, entonces $f'(x_0+h)>0$. Por lo tanto $f$ es creciente, un poco después de $x_0$. Estos dos hechos implican que $x_0$ es un punto mínimo local. El caso $f'(x_0)<0$, se estudia de manera similar.

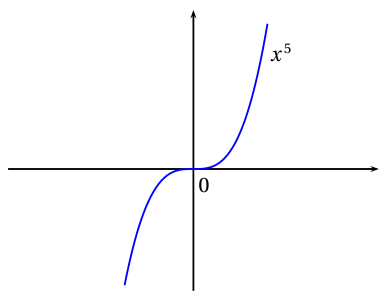
En el siguiente ejercicio se obtiene un recíproco parcial al resultado anterior. Es parcial en el sentido de que no se obtienen desigualdades estrictas.

**Ejercicio 10.4** *Suponga que $f''(x_0)$ existe. Si $f$ tiene un mínimo (máximo) local en $x_0$, verificar que $f''(x_0) \geq 0$ $(f''(x_0) \leq 0)$.*

El caso en el que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ no implica que $x_0$ sea un extremo local. Por ejemplo, la función $f(x) = x^5$ cumple que

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f'(0) = 0 = f''(0) = 0,$$

sin embargo 0 no es extremo local como se aprecia en la figura de abajo




**Ejemplo 10.1** *Encontrar los extremos locales de $f(x) = x^5 - 5x^3$.*

**Solución.** Derivamos para encontrar los puntos críticos

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3).$$

De esto vemos que $f'(x) = 0$ solamente en 0 y en $\pm\sqrt{3}$.
Derivamos de nuevo

$$f''(x) = 20x^3 - 30x,$$

y evaluamos

$$f''(0) = 0, \quad f''(-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3}, \quad f''(\sqrt{3}) = 30\sqrt{3}.$$

Puesto que $f''(-\sqrt{3}) < 0$ y $f''(\sqrt{3}) > 0$, entonces $-\sqrt{3}$ es un máximo local y $\sqrt{3}$ es un mínimo local. En 0 el criterio de la segunda derivada no nos da información. En este caso estudiamos el signo de $f'(x) = 5x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(0, \sqrt{3})$.
*Caso* $x \in (-\sqrt{3}, 0)$: En este caso

$$-\sqrt{3} < x < 0 < \sqrt{3} \Rightarrow 0 < x + \sqrt{3}, \quad x - \sqrt{3} < 0,$$

por lo tanto $f'$ es negativa.
*Caso* $x \in (0, \sqrt{3})$: Esto implica

$$-\sqrt{3} < 0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow 0 < x + \sqrt{3}, \quad x - \sqrt{3} < 0,$$

por ende $f'$ es negativa.
Debido a que $f'$ no cambia de signo, entonces 0 no es un extremo local. ■

**Ejercicio 10.5** *Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y clasificarlos en puntos de inflexión, mínimos o máximos globales:*

$$\begin{array}{llll} (a) & g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}, & (d) & y(x)=x-\dfrac{1}{x^2}, \\ (b) & f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}, & (e) & k(x)=x^2-\dfrac{1}{x}, \\ (c) & h(x)=(x-1)^2(x-2)^2, & (f) & q(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}. \end{array}$$

**Ejercicio 10.6** *Dar condiciones sobre los coeficientes de $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de manera que el polinomio $p$ tenga sólo una raíz real.*

## 10.3. Un método para trazar gráficas

En los siguientes pasos describimos una técnica para trazar gráficas:

(1) Simetría.

(2) Puntos y valores críticos ($f'(x_0)=0$).

(3) Puntos y valores donde $f$ no es diferenciable.

(4) Signo de $f$ entre los intervalos determinados en (2) y (3).

(5) Raíces.

(6) Asíntotas.

(7) Puntos de inflexión y valor de $f$ en los puntos de inflexión ($f''(x_0)=0$).

(8) Signo de $f''$ en los intervalos determinados por los puntos de inflexión.

A continuación damos algunos ejemplos de aplicación del método.

**Ejemplo 10.2** *Trazar la gráfica de*

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

**Solución.** Trabajaremos los pasos del método.

(1) $f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=f(x)$. Por lo tanto, $f$ es simétrica respecto al eje $y$.

(2) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Al igualar $f'(x)=0$, vemos que 0 es el único punto crítico y el valor crítico es $f(0)=1$.

(3) Si $x\in(0,\infty)$, entonces $f'(x)<0$, por lo tanto $f$ es decreciente. Si $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0$, $f$ es creciente. Así 0 es un máximo.

(6) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+x^2}$.

(7) $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Al igualar $f''(x) = 0$, tenemos que $\pm 1/\sqrt{3}$ son los posibles puntos de inflexión y $f(\pm 1/\sqrt{3}) = 3/4$.

(8) La factorización de la segunda derivada de $f$ es

$$f''(x) = \frac{6(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}. \tag{10.5}$$

Consideremos los casos:
Si $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3})$, tenemos

$$x < -1/\sqrt{3} < 1/\sqrt{3} \Rightarrow x + 1/\sqrt{3} < 0,\ \ x - 1/\sqrt{3} < 0.$$

Si $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, resulta que

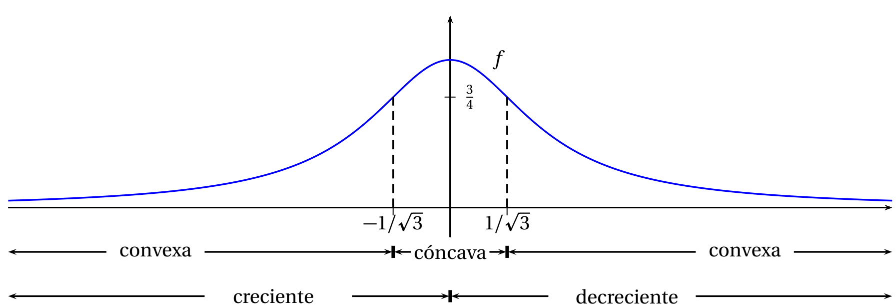
$$-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3} \Rightarrow x + 1/\sqrt{3} > 0,\ \ x - 1/\sqrt{3} < 0.$$

Si $x \in (1/\sqrt{3}, \infty)$, tenemos

$$x > 1/\sqrt{3} > -1/\sqrt{3} \Rightarrow x + 1/\sqrt{3} > 0,\ \ x - 1/\sqrt{3} > 0.$$

De esto y de que el denominador en (10.5) es positivo se concluye que $f''(x) > 0$, si $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ y que $f''(x) < 0$, si $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Es decir, $f$ es convexa en $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ y cóncava en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Con esta información trazamos la gráfica de $f$




Nótese el cambio de concavidad al nivel de $3/4$. ∎

**Ejemplo 10.3** *Trazar la gráfica de* $f(x) = 12 + 8x^3 - x^4$.

**Solución.** Seguimos los pasos del método propuesto.

(1) $f(-x) = 12 - 8x^3 + x^4 \neq 12 + 8x^3 - x^4 = f(x)$, $f$ no es simétrica.

(2) $f'(x) = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$. Por lo tanto, 0 y 6 son puntos críticos y los valores críticos son

$$f(0) = 12, \qquad f(6) = 444.$$

(4) Basta considerar los intervalos $(-\infty, 6)$ y $(6, \infty)$, pues el factor $4x^2$ en $f'$ siempre es positivo. Por lo tanto, $f'(x) \geq 0$ si $x \in (-\infty, 6)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (6, \infty)$. Esto nos permite concluir que 6 es un máximo.

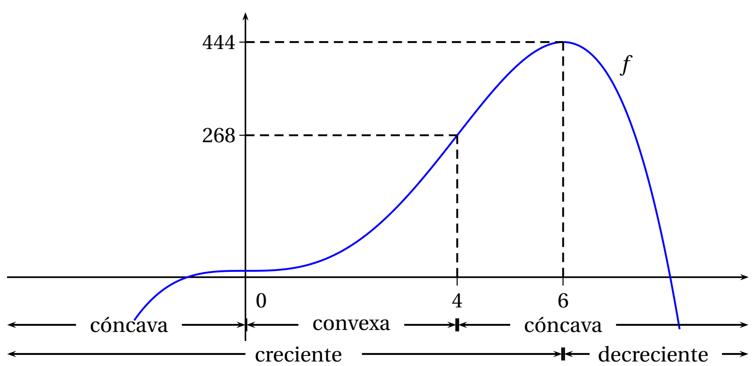
(5) No es fácil calcular las raíces de $f$.

(6) No tiene asíntotas.

(7) $f''(x) = 48x - 12x^2 = 12x(4-x)$. Igualando $f''(x) = 0$ vemos que 0 y 4 son posiblemente puntos de inflexión. Además $f(4) = 268$.

(8) Consideremos los casos:
Si $x \in (-\infty, 0)$, es claro que $x < 0$, además $x < 0 < 4$ implica que $4 - x > 0$. Por lo tanto $f''$ es negativa en $(-\infty, 0)$.
Si $x \in (0, 4)$, entonces $0 < x$ y $x < 4$, es decir $4 - x > 0$. De lo cual deducimos que $f''$ es positiva en $(0, 4)$.
Si $x \in (4, \infty)$, entonces $x > 4 > 0$, por lo tanto $4 - x < 0$. Es decir, $f''$ es negativa en $(4, \infty)$.
En particular vemos que 0 y 4 son puntos de inflexión, pues hubo cambio de concavidad. En resumen, $f$ es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y convexa en $(0, 4)$.

Con esta información trazamos la gráfica de la función $f$




A diferencia del ejemplo anterior, aquí hay varios puntos donde cambia la concavidad de la función, ¿cuáles son? ■

**Ejercicio 10.7** *Trazar la gráfica de las siguientes funciones*

$$(a)\ f(x) = \frac{1}{2 - x^3}, \quad (b)\ g(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3 + 2}, \quad (c)\ h(z) = z^5 - 2z - 1.$$

# Capítulo 11

# Función exponencial y funciones hiperbólicas

En este capítulo introduciremos una de las funciones más importantes de las matemáticas, a saber, la función exponencial. Lo que haremos será asumir un resultado de análisis matemático y a partir de éste definir la función exponencial. Estudiaremos la rapidez de crecimiento de la función exponencial en comparación con la rapidez de crecimiento de los polinomios. También introduciremos otras funciones que se definen en términos de la función exponencial, las funciones hiperbólicas.

## 11.1. Función exponencial

En esta sección trabajaremos asumiendo el siguiente hecho.

**Teorema 11.1** *Existe una función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *diferenciable en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$f' = f, \qquad f(0) = 1. \tag{11.1}$$

La demostración de este resultado se puede consultar en [1]. Si $f(t)$ representase el tamaño de cierta población de bacterias, entonces (11.1) significaría que la población inicia con una bacteria y su tasa de crecimiento ($f'(t) = df(t)/dt$) es directamente proporcional al tamaño de la población $f(t)$, al tiempo $t$. Expresiones como (11.1) se llaman ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

En lo que sigue deduciremos varias propiedades de la función $f$. Notemos primero que

$$\begin{aligned}(f(x)f(-x))' &= -f(x)f'(-x)) + f'(x)f(-x))\\ &= -f(x)f(-x)) + f(x)f(-x)) = 0.\end{aligned}$$

Del Ejemplo 9.3 se sigue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x)f(-x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular
$$c = f(0)f(-0) = f(0)^2 = 1.$$
Es decir,
$$f(x)f(-x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$
Esto implica que
$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11.3}$$
En efecto, si existiese un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio, aplicado al intervalo con extremos $x_0$ y 1, resultaría que existe un $x_1$ tal que $f(x_1) = 0$, por lo tanto
$$f(x_1)f(-x_1) = 0f(-x_1) = 0.$$
Lo que contradice (11.2). Esto nos indica que (11.3) debe ser cierta.

Por otra parte, puesto que $f'(x) = f(x) > 0$, para cada $x$ en $\mathbb{R}$, deducimos que $f$ es creciente estrictamente, ver la página 116.

**Proposición 11.1** *A lo más hay una única función que cumple (11.1).*

Para verificar la unicidad supongamos que hay otra función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple (11.1). Entonces
$$\begin{aligned}
[(g(x)-f(x))f(-x)]' &= [f(-x)g(x)-f(x)f(-x)]' \\
&= f(-x)g'(x)-g(x)f'(-x) \\
&\quad +f(x)f'(-x)-f'(x)f(-x) \\
&= f(-x)g(x)-g(x)f(-x) \\
&\quad +f(x)f(-x)-f(x)f(-x) = 0.
\end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$(g(x)-f(x))f(-x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Pero
$$(g(1)-f(1))f(-1) = (1-1)f(-1) = 0 = c.$$
Esto implica que
$$(g(x)-f(x))f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Puesto que $f(-x) > 0$, entonces
$$g(x)-f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Esto significa que $g = f$.

Esta única función se llama función exponencial y se denota por
$$f(x) = e^x, \text{ o por } f(x) = \exp(x).$$
En particular, $1 = f(0) = e^0$ y
$$f(1) = e^1 = e = 2.71828182\cdots$$
es un número irracional y trascendente (es decir, no es raíz de un polinomio con coeficientes racionales).

**Ejemplo 11.1** *Verificar que*

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

**Solución.** Sea $y \in \mathbb{R}$ arbitrario fijo. Por (11.3) tenemos que $e^y > 0$, entonces la función

$$g(x) = \frac{e^{x+y}}{e^y} = \frac{f(x+y)}{f(y)},$$

está bien definida para cada $x \in \mathbb{R}$. Además, por la regla de la cadena

$$g'(x) = \frac{f'(x+y)}{f(y)} = \frac{f(x+y)}{f(y)} = g(x),$$

y cumple también que

$$g(0) = \frac{f(y)}{f(y)} = 1.$$

Es decir, $g$ es solución de (11.1). Por la unicidad de la función exponencial se tiene que $g = f$, es decir,

$$\frac{e^{x+y}}{e^y} = \frac{f(x+y)}{f(y)} = f(x) = e^x.$$

Multiplicando la igualdad anterior por $e^y$ obtenemos la igualdad deseada. ■

**Ejemplo 11.2** *Verificar que*

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11.5}$$

**Solución.** Definamos la función auxiliar

$$h(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivamos $h$ para obtener los puntos críticos, $h'(x) = e^x - 1$. Consideramos la ecuación

$$h'(x) = e^x - 1 = 0.$$

De aquí vemos que la única solución, por ser $e^x$ creciente, es 0. Derivando $h'$ nos queda

$$h''(x) = e^x.$$

Puesto que $h''(0) = 1 > 0$, entonces 0 es un punto mínimo global. Por lo tanto,

$$e^x - 1 - x = h(x) \geq h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De esto se obtiene la desigualdad buscada. ■

El ejemplo precedente nos indica que la función exponencial crece más rápido que la función identidad. Veremos aún más, el límite (11.6) nos indica que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio.

Nótese que

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x)f(-x).$$

Por lo tanto $f(-x)$ es el inverso multiplicativo de $f(x)$, es decir,

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{f(x)} = f(-x) = e^{-x}.$$

**Ejemplo 11.3** *Calcular los límites*

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} e^x, \quad (b)\ \lim_{x\to-\infty} e^x.$$

**Solución.** Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty.$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Como se quería comprobar. ∎

**Ejemplo 11.4** *Verificar que para cada $n \in \mathbb{N}$,*

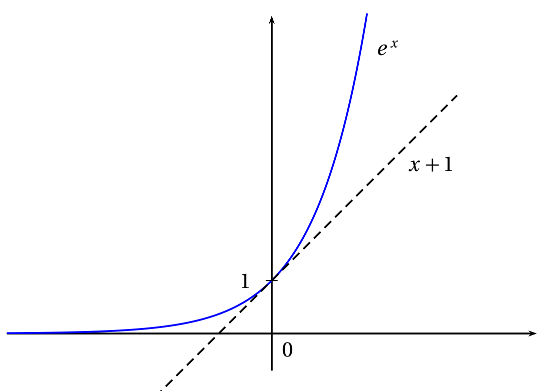
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \tag{11.6}$$

**Solución.** Aplicando $n$-veces la Regla de L'Hospital nos queda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Nótese que en la última iguadad hemos usado el ejercicio anterior. ∎

Puesto que $f''(x) = e^x > 0$, entonces $e^x$ es convexa. Reuniendo esta información podemos trazar la gráfica de $e^x$:




Al trabajar derivadas de la función exponencial se hace uso frecuente, y de manera mecánica, de la regla de la cadena.

**Ejemplo 11.5** *Calcular la derivada de* $e^{\sqrt{x^2+1}}$.

**Solución.** Consideremos las funciones $f(x)=e^x$ y $h(x)=(x^2+1)^{1/2}$. Por lo tanto, $e^{\sqrt{x^2+1}}=(f\circ h)(x)$. Aplicando la regla de la cadena resulta

$$\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)'=f'(h(x))h'(x),$$

donde

$$f'(x)=e^x,\quad h'(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x.$$

Por lo tanto

$$\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)'=e^{h(x)}x(x^2+1)^{-1/2}=e^{\sqrt{x^2+1}}x(x^2+1)^{-1/2}.$$

No es necesario realizar el procedimiento anterior. Se puede trabajar así

$$\begin{aligned}\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= e^{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\\ &= e^{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}2x.\end{aligned}$$

Con la práctica ésta será la manera usual de derivar funciones donde aparece la función exponencial. ■

**Ejemplo 11.6** *Trazar la gráfica de la función* $f(x)=e^{-x^2/2t}$, *donde* $t>0$ *es una constante.*

**Solución.** Seguiremos el método de la Sección 10.3.

(1) $f$ es simétrica, $f(-x)=e^{-(-x)^2/2t}=e^{-x^2/2t}=f(x)$.

(2) Derivando, haciendo uso de la regla de la cadena,

$$f'(x)=e^{-x^2/2t}\left(-\frac{2x}{2t}\right)=-\frac{x}{t}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

De (11.3) deducimos que la única solución de la ecuación $f'(x)=0$ es 0. Además

$$f(0)=e^{-0}=1.$$

(4) De (11.3) también vemos que $f'(x)>0$ si $x\in(-\infty,0)$ y $f'(x)<0$ si $x\in(0,\infty)$. Es decir, $f$ es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,\infty)$. Por lo tanto 0 es un máximo global.

(6) Puesto que, ver (11.5),

$$\exp\left(\frac{x^2}{2t}\right)\geq 1+\frac{x^2}{2t},$$

entonces

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\leq\frac{1}{1+\frac{x^2}{2t}}.$$

De lo cual se sigue que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)=0, \qquad \lim_{x\to\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)=0.$$

(7) Calculando la segunda derivada de $f$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\frac{1}{t^2}(x^2-t) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\frac{1}{t^2}(x-\sqrt{t})(x+\sqrt{t}), \end{aligned}$$

vemos que $\pm\sqrt{t}$ son posibles puntos de inflexión.

(8) Esto nos conduce a considerar los siguientes casos.
*Caso* $x\in(-\infty,-\sqrt{t})$: Esto implica $x<-\sqrt{t}<\sqrt{t}$, por lo tanto

$$x+\sqrt{t}<0, \quad x-\sqrt{t}<0.$$

Así $f''(x)>0$, es decir $f$ es convexa en $(-\infty,-\sqrt{t})$,
*Caso* $x\in(-\sqrt{t},\sqrt{t})$: Aquí tenemos que

$$-\sqrt{t}<x<\sqrt{t} \Rightarrow 0<x+\sqrt{t}, \quad x-\sqrt{t}<0.$$

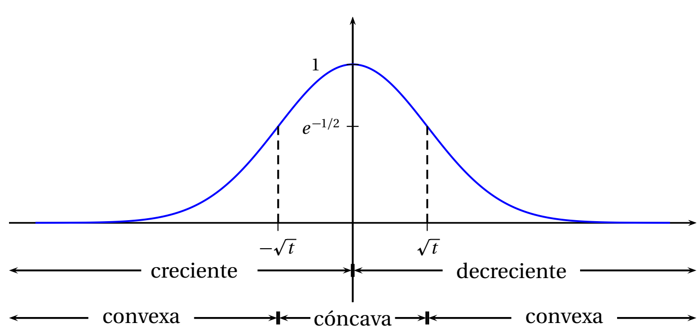
Lo que implica que $f''(x)<0$, por ende $f$ es cóncava en $(-\sqrt{t},\sqrt{t})$.
*Caso* $x\in(\sqrt{t},\infty)$: En otros símbolos $x>\sqrt{t}>-\sqrt{t}$, lo que produce

$$x-\sqrt{t}>0, \quad x+\sqrt{t}>0.$$

Por lo tanto, $f''(x)>0$, es decir, $f$ es convexa en $(\sqrt{t},\infty)$.
De lo anterior se deduce que $-\sqrt{t}$ y $\sqrt{t}$ son puntos de inflexión y

$$f(-\sqrt{t})=\exp\left(-\frac{(-\sqrt{t})^2}{2t}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=f(\sqrt{t}).$$

Con esta información trazamos la gráfica de $f$:




Observe el cambio de concavidad en $\sqrt{t}$ y en $-\sqrt{t}$. ■

**Ejercicio 11.1** *Encontrar la segunda derivada de las siguientes funciones*

$$(a)\ \frac{e^{x^2}}{x^3+1},\quad (b)\ e^{1/x}+1/e^x,\quad (c)\ (e^{-3x}-e^{3x})^5,\quad (d)\ \sqrt{e^{2x}+3x},\quad (e)\ e^{e^x}.$$

**Ejercicio 11.2** *Usar derivación implícita en cada caso:*

$$(a)\ y^5+xe^y=3x^2-6,\quad (c)\ e^{xy}-x^3+3y^2=11,$$
$$(b)\ xe^{y^2}-xe^y+ye^x=2,\quad (d)\ \exp(xe^y-\exp(ye^x))=5xy^2.$$

**Ejercicio 11.3** *Encontrar la recta tangente a la gráfica de $y=2x-e^{-x}$ que sea paralela a la recta* $6x-2y=7$.

**Ejercicio 11.4** *Trazar la gráfica de* $x^2e^{-2x}$.

**Ejercicio 11.5** *Calcular los siguientes límites*

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x},\quad (b)\ \lim_{x\downarrow 0} xe^{1/x^2},\quad (c)\ \lim_{x\uparrow 0} xe^{1/x^2},\quad (d)\ \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\operatorname{sen} x}{\cos x-\cos^2 x}.$$

**Ejemplo 11.7** *El modelo de Jenss [7] es una fórmula para predecir la estatura de niños en edad preescolar. Si $h$ es la altura (en cm) y $x$ es la edad (en años), entonces*

$$h(x)=79.041+6.39x-e^{3.261-0.993x},\quad \frac{1}{4}\le x\le 6.$$

$(a)$ *Calcular la altura y la tasa de crecimiento de un niño típico de uno, dos y tres años de edad. Compare la altura con la dada en tablas (buscarlas en la web).*
$(b)$ *¿A qué edad es mayor la rapidez de crecimiento?, ¿a qué edad es menor?*

**Solución.** $(a)$ Evaluando $h$ en $1, 2$ y $3$ resulta

$$h(1)=75.771,\quad h(2)=88.242,\quad h(3)=96.885.$$

En (http://www.cdc.gov/growthcharts/data/spanishpdf95/co06l017.pdf) aparece una tabla de la cual extraemos los siguientes valores

$$75.7,\qquad 87.5,\qquad 95.9.$$

Estos valores son en cm y son aproximados. Una pregunta interesante es qué función nos da una gráfica como la que aparece en la tabla de la página web. Como hemos discutido en la introducción, el modelo de Jenss es adecuado sólo en una parte de la tabla (por ejemplo en el intervalo [0,0.25] no debe ser usado).

Para encontrar la tasa de crecimiento del modelo de Jenss derivamos,

$$\frac{dh}{dx}(x)=6.39+\exp(3.261-0.993x)(0.993).$$

Para un niño de un año la tasa de crecimiento es

$$\frac{dh}{dx}(1)=6.39+\exp(3.261-0.993)(0.993)=15.98 \text{ cm/año}.$$

Nótese que, contando sólo con la tabla de la página web, no es fácil determinar la tasa de crecimiento. Ésta es una de las razones por las que las funciones, y por ende la derivada, son útiles.

(b) Derivamos de nuevo

$$\frac{d^2h}{dx^2}(x) = -\exp(3.261 - 0.993x)(0.993)^2.$$

De esto cocluimos que $dh(x)/dx$ es decreciente. Es decir, la tasa de crecimiento es mayor en 1/4 de año y su valor más pequeño es a los 6 años. ■

## 11.2. Funciones hiperbólicas

Una clase especial de funciones que se obtienen de la función exponencial son las funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned}
\mathrm{senh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ seno hiperbólico de } x,\\
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ coseno hiperbólico de } x.
\end{aligned}$$

De manera análoga, a las funciones trigonométricas, se definen

$$\begin{aligned}
\tanh(x) &= \frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}, \text{ tangente hiperbólica de } x,\\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\mathrm{senh}(x)}, \text{ cotangente hiperbólica de } x,\\
\mathrm{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)}, \text{ secante hiperbólica de } x,\\
\mathrm{csch}(x) &= \frac{1}{\mathrm{senh}(x)}, \text{ cosecante hiperbólica de } x.
\end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos presentamos algunas propiedades de las funciones hiperbólicas.

**Ejemplo 11.8** *Verificar que*
$(a)$ $\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) = 1$.
$(b)$ $\mathrm{senh}(x+y) = \mathrm{senh}(x)\ \cosh(y) + \cosh(x)\ \mathrm{senh}(y)$.

**Solución.** Usando las definiciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\
&= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4} = 1,\\
\mathrm{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\mathrm{senh}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\\
= \quad & \frac{e^{x+y}-e^{-x+y}+e^{x-y}-e^{-x-y}}{4}\\
&+\frac{e^{x+y}+e^{-x+y}-e^{x-y}-e^{-x-y}}{4}\\
= \quad & \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{senh}(x+y).
\end{aligned}
$$

Como se quería comprobar. ■

**Ejercicio 11.6** *Verificar las identidades*

$(a)$ $\operatorname{sech}^2(x)+\tanh^2(x)=1$, $(b)$ $\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$.

**Ejemplo 11.9** *Trazar la gráfica de* $\operatorname{senh}(x)$ *y* $\cosh(x)$.

**Solución.** Sigamos los pasos de la página 129.

(1) Primero notemos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-x)&=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\operatorname{senh}(x),\\
\cosh(-x)&=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh(x).
\end{aligned}
$$

Es decir, el seno hiperbólico es impar y por lo tanto su gráfica es simétrica con respecto al origen, y el coseno hiperbólico es par y su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$.

(2) Calculemos sus derivadas,

$$
(\operatorname{senh} x)'=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad (\cosh x)'=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot
$$

Nótese que $(\operatorname{senh} x)'>0$, por lo tanto $\operatorname{senh} x$ es creciente estrictamente, en consecuencia no tiene puntos críticos. Por otra parte

$$
\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow e^{2x}=1.
$$

La única solución de esta ecuación es 0.

(4) Estudiemos el signo de $(\cosh x)'$.
*Caso* $x\in(-\infty,0)$: Tenemos que $x<0$, por ser $e^{x}$ creciente resulta

$$
e^{x}<e^{0}=1,\quad -e^{-x}<-e^{0}=-1,
$$

por ende, $e^{x}-e^{-x}<1-1=0$. Por lo tanto, $\cosh x$ es decreciente en $(-\infty,0)$.
*Caso* $x\in(0,\infty)$: De manera análoga, $x>0$,

$$
e^{x}>e^{0}=1,\quad -e^{-x}>-e^{0}=-1.
$$

Sumando estas desigualdades, $e^x - e^{-x} > 1 - 1 = 0$. De esto deducimos que $\cosh x$ es creciente en $(0,\infty)$. Por lo tanto 0 es un punto mínimo global para $\cosh x$ y

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1.$$

(6) Estas funciones no tienen asíntotas. Sin embargo, para estudiar el comportamiento de las funciones para valores grandes de $x$ usaremos el Ejemplo 11.3

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} e^x - \lim_{x\to\infty} e^{-x}\right) = \infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\right) = -\infty.
\end{aligned}$$

Análogamente

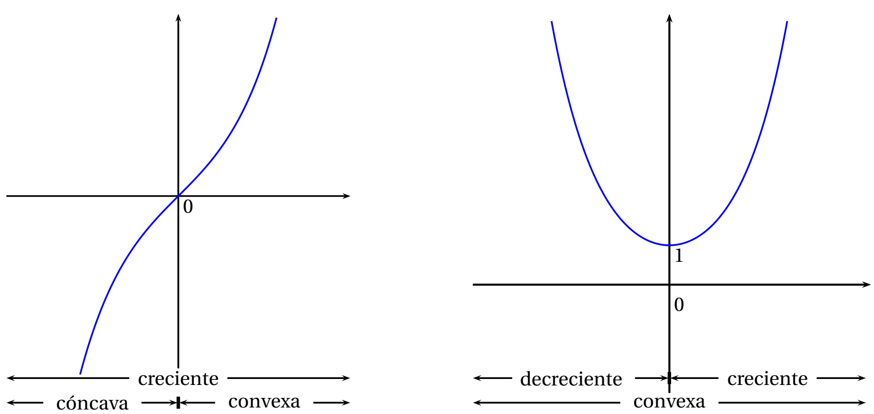
$$\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty = \lim_{x\to-\infty} \cosh x.$$

(8) Calculemos la segunda derivada,

$$(\operatorname{senh} x)'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (\cosh x)'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot$$

Ahora se invierten los papeles, es decir, $(\cosh x)''$ es siempre positiva, por lo que $\cosh x$ es convexa y 0 es un punto de inflexión para $\operatorname{senh} x$, pues en $(-\infty,0)$, $(\operatorname{senh} x)'' < 0$ y en $(0,\infty)$, $(\operatorname{senh} x)'' > 0$, esto significa que $\operatorname{senh} x$ es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,\infty)$.

Con esta información trazamos la gráfica de $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$, respectivamente:




Nótese la diferencia que existe con las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Estas últimas son acotadas y periodicas, y las hiperbólicas no. ■

**Ejercicio 11.7** *Trazar la gráfica de*

$$(a)\ \tanh(x),\quad (b)\ \coth(x),\quad (c)\ \operatorname{sech}(x),\quad (d)\ \operatorname{csch}(x).$$

**Ejercicio 11.8** *Hallar la derivada $n$-ésima de las siguientes funciones*

$$(a)\ \cosh(x),\quad (b)\ \operatorname{senh}(x),\quad (c)\ g(x)=xe^{x}.$$

# Capítulo 12

# Función inversa

Supongamos que cada elemento $y \in R(f)$ (rango de $f$) proviene de un único elemento $x \in D(f)$, es decir, $y = f(x)$. Entonces tiene sentido definir una nueva regla de correspondencia, $x = g(y)$, no hay ambiguedad pues $x$ es único. En este capítulo estudiaremos las propiedades de $g$. Cabe hacer notar que este nuevo método de construir funciones resultará muy útil, en particular nos permitirá construir la función logaritmo y las funciones trigonométricas inversas, que veremos en el siguiente capítulo.

## 12.1. Definición de función inversa

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A = D(f) \subset \mathbb{R}$ el dominio de $f$. Recordemos que el conjunto

$$R(f) = \left\{ f(x) : x \in A \right\} \subset \mathbb{R},$$

se llama imagen o rango de $f$.

Decimos que $f$ es inyectiva (o uno a uno) si $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y. \tag{12.1}$$

Equivalentemente, si $x, y \in A$,

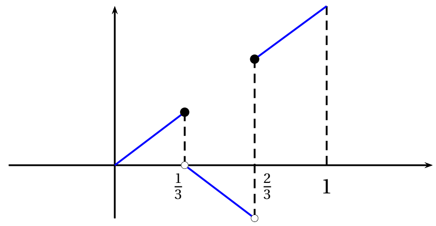
$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

es decir, puntos distintos tienen valores diferentes.

Nótese que toda función estrictamente monótona es inyectiva. En efecto, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente estrictamente si $x, y \in A$, $x \neq y$, entonces hay dos posibilidades

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Rightarrow \quad f(x) < f(y), \\ x > y \quad &\Rightarrow \quad f(x) > f(y). \end{aligned}$$

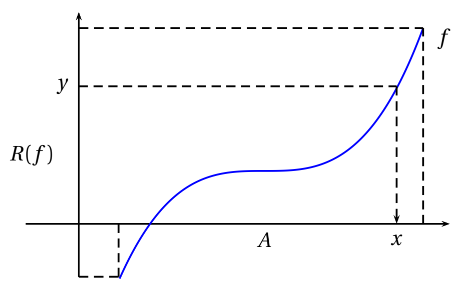
En cualquier caso $f(x) \neq f(y)$. Por otra parte, hay funciones inyectivas que no necesariamente son monótonas estrictamente. Por ejemplo, la que se muestra en la siguiente gráfica



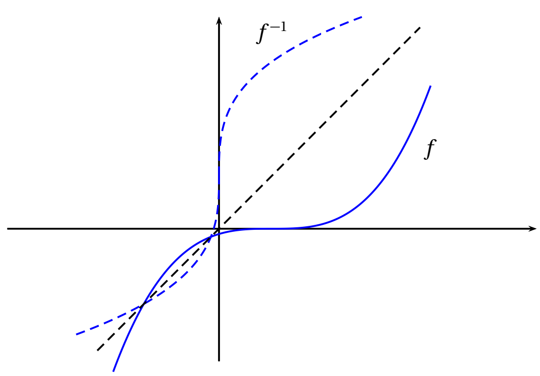

Sin embargo, si aunado a la inyectividad pedimos continuidad entonces obtenemos la monotonía (la prueba se puede ver en la página 55 de [3]).

**Definición 12.1** *Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva. Se llama función inversa de $f$, y se denota por $f^{-1}$, a la función $f^{-1} : R(f) \to A$ tal que para cada $y \in R(f)$ existe un único $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. De este modo $f^{-1}(y) = x$.*

Este concepto lo podemos interpretar graficamente así




Nótese que la gráfica de $f^{-1}$ se obtiene de la gráfica de $f$ por simetría con respecto a la diagonal. La siguiente figura indica cómo es esto



**Ejercicio 12.1** *Hacer la gráfica de la función inversa de* $f(x)=(x+2)^{-1}$, $x \neq -2$.

**Ejemplo 12.1** *Sea* $f(x)=x^n$*, con*

$$D(f)=\begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{si } n \textit{ es impar,} \\ [0,+\infty), & \textit{si } n \textit{ es par.} \end{cases}$$

*Encontrar la función inversa de* $f$.

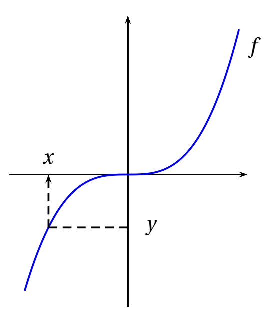
**Solución.** Nótese que

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

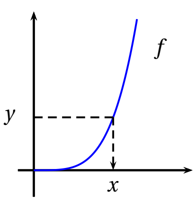
Si $n$ es impar $n-1$ es par y $f'(x)>0$, para toda $x\in\mathbb{R}$. Si $n$ es par, entonces $f'(x)>0$, si $x>0$. En cualquier caso $f'(x)>0$, si $x\in D(f)$. Esto implica que $f$ es una función monótona creciente estrictamente. Además

$$R(f)=\begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ [0,\infty), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Para cada $y\in R(f)$ existe un $x\in D(f)$ tal que $f(x)=y$, ver las gráficas




Gráfica de $f(x)=x^n$, cuando $n$ es impar, $D(f)=\mathbb{R}$




Gráfica de $f(x)=x^n$, cuando $n$ es par, $D(f)=[0,\infty)$

(La justificación rigurosa de la existencia del $x$ es a través de Teorema del Valor Intermedio). El número $x$ se llama raíz $n$-ésima y se denota por $\sqrt[n]{y}$, de este modo, $f^{-1}(y)=\sqrt[n]{y}$. ■

Es conveniente enfatizar que $f(x)=x^n$ no tiene inversa, cuando $n$ es par, pues la función $f$ no es inyectiva. En efecto, dado el $y\geq 0$ hay dos candidatos para elegir al $x$, esta falta de unicidad implica la no existencia de $f^{-1}$.

Nótese que

$$f(f^{-1}(y))=y, \quad \forall y\in R(f), \tag{12.2}$$

$$f^{-1}(f(x))=x, \quad \forall x\in D(f). \tag{12.3}$$

La función inversa es la única función que cumple ambas condiciones.

**Ejemplo 12.2** *Sean $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Verificar (12.2) y (12.3).*

**Solución.** Vemos que

$$f(g(x))=(\sqrt{x})^2=x, \quad \forall x\geq 0,$$
$$g(f(x))=\sqrt{x^2}=|x|, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

La composición $g\circ f$ no es la identidad, por lo tanto $g$ no es la inversa de $f$. La cual, como hemos discutido antes, no tiene inversa. ■

**Ejercicio 12.2** $(a)$ *Verificar que la composición de dos funciones inyectivas es inyectiva.* $(b)$ *Expresar $(f\circ g)^{-1}$ en términos de $f^{-1}$ y de $g^{-1}$.* $(c)$ *Si $f\circ g$ es inyectiva, ¿es $g$ inyectiva?*

**Ejemplo 12.3** *Encontrar los intervalos $(a,b)$ tales que*

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1},$$

*es inyectiva.*

**Solución.** Derivamos $f'$,

$$f'(x)=\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}-1-x)}{(x^2+1)^2}.$$

De aquí vemos que debemos considerar el signo de $f'$ en los siguientes intervalos.
*Caso* $x\in(-\infty,-\sqrt{2}-1)$: En este caso

$$x<-\sqrt{2}-1<\sqrt{2}-1\Rightarrow x-\sqrt{2}+1<0, \quad -\sqrt{2}-1-x>0.$$

Lo que implica que $f'(x)<0$.
*Caso* $x\in(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)$: Esto equivale a

$$-\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}-1\Rightarrow x-\sqrt{2}+1<0, -\sqrt{2}-1-x<0.$$

Por lo tanto, $f'(x)>0$.
*Caso* $x\in(\sqrt{2}-1,\infty)$: De aquí deducimos que

$$-\sqrt{2}-1<\sqrt{2}-1<x\Rightarrow x-\sqrt{2}+1>0, \quad -\sqrt{2}-1-x<0.$$

De esto obtenemos que $f'(x)<0$.
De esta información concluimos que $f$ es estrictamente monótona en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{2}-1]$, $[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$ y $[\sqrt{2}-1,\infty)$, por ende, en estos intervalos $f$ es inyectiva. ■

**Ejercicio 12.3** *Encontrar los intervalos $(a,b)$ donde son inyectivas las funciones:*

$$(a)\ f(x)=x^3-3x^2, \quad (b)\ f(x)=\frac{1}{2-x^2}, \quad (c)\ f(x)=\frac{x^4-4}{x^2-1}, \quad (d)\ f(x)=\frac{rx+s}{px+q}.$$

## 12.2. Propiedades de la función inversa

Para ciertos casos se puede aplicar el siguiente método para encontrar la función inversa:

(1) Verificar que $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

(2) Despejar de la fórmula $y = f(x)$ a $x$. Obteniendo una expresión de la forma $x = f^{-1}(y)$.

(3) Verificar que se cumplen ambas relaciones (12.2)-(12.3).

Evidentemente, el método no funciona si la función no es dada por una fórmula.

**Ejemplo 12.4** *Sea* $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+5}}{2} - 1$. *Encontrar* $f^{-1}$.

**Solución.** Notemos que $D(f) = [-5/3, \infty)$ y que $R(f) = [-1, \infty)$.

(1) Derivamos $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{3}{4(3x+5)^{1/2}}.$$

Veamos que $f'(x) > 0$ en $(-5/3, \infty)$, por lo tanto $f$ es creciente. En consecuencia $f$ es inyectiva (ver la página 143).

(2) Hacemos

$$y = \frac{\sqrt{3x+5}}{2} - 1,$$

y despejamos $x$

$$x = \frac{4(y+1)^2 - 5}{3},$$

para obtener $f^{-1}(y) = x$.

(3) Verificamos (12.2)-(12.3),

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(y)) &= \frac{\sqrt{3\left(\dfrac{4(y+1)^2-5}{3}\right)+5}}{2} - 1 \\
&= \frac{\sqrt{4(y+1)^2}}{2} - 1 \\
&= \left|y+1\right| = y+1, \quad y \in [-1, \infty), \\
f^{-1}(f(x)) &= \frac{4\left(\left(\dfrac{\sqrt{3x+5}}{2} - 1\right)+1\right)^2 - 5}{3} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3x+5}\right)^2 - 5}{3} = \frac{(3x+5)-5}{3} = x, \quad x \in [-5/3, \infty).
\end{aligned}$$

Recordemos que para que una función esté bien definida debemos dar su dominio y su valor, en este caso $f^{-1}(x) = 3^{-1}(4(x+1)^2 - 5)$, $x \in D(f^{-1}) = [-1, \infty)$. ■

Enseguida enunciamos las propiedades básicas de la función inversa.

**Teorema 12.1** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva.*

*(a) $f^{-1}$ es continua.*

*(b) Si $f$ es monótona creciente estrictamente, entonces $f^{-1}$ es monótona creciente estrictamente.*

*(c) Si $f$ es diferenciable en $f^{-1}(y)$, con $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, entonces $f^{-1}$ es diferenciable en $y$, además*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{12.4}$$

Observe que una manera de darse cuenta que (12.4) debe ser la forma correcta de la derivada de la función inversa es usar en (12.2) la regla de la cadena,

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = (f(f^{-1}(y)))' = 1.$$

Despejando obtenemos (12.4).

**Ejemplo 12.5** *Sea $f(x) = x^n$, $n$ impar. Encontrar $(f^{-1})'$.*

**Solución.** Sea $y \in \mathbb{R}$, entonces $f$ es diferenciable en $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Puesto que $f'(x) = nx^{n-1}$, resulta

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n(f^{-1}(y))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{(1/n)-1}.$$

Donde hemos usado (12.4). ■

Más generalmente, si $n \in \mathbb{N}$ es impar y $m \in \mathbb{Z}$ la derivada de la función

$$f(x) = x^{m/n} = (x^{1/n})^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

esta dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= m\left(x^{1/n}\right)^{m-1}\left(x^{1/n}\right)' \\ &= m x^{(m-1)/n} \frac{1}{n} x^{(1/n)-1} \\ &= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}. \end{aligned}$$

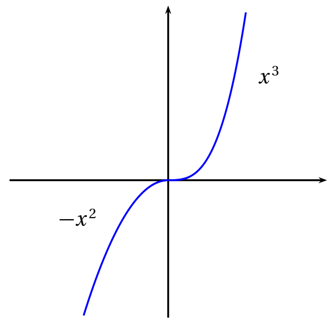
Si procedemos como en el ejemplo previo obtenemos $(f^{-1})'(y) = (n/m)y^{(n/m)-1}$.

**Ejemplo 12.6** *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

*Encontrar $(f^{-1})'$.*

**Solución.** En $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ la función $f$ es creciente estrictamente, como se aprecia en su gráfica de abajo, por lo tanto $f$ es inyectiva:




Además, en cada intervalo $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ sabemos calcular $f^{-1}$. Entonces proponemos

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y\geq 0,\\ -\sqrt{-y}, & y<0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Verifiquemos que se cumplen (12.2)-(12.3),

$$f(f^{-1}(y))=\begin{cases} (\sqrt[3]{y})^3, & y\geq 0,\\ -(-\sqrt{-y})^2, & y<0, \end{cases}=\begin{cases} y, & y\geq 0,\\ -(-y), & y<0, \end{cases}=y,$$

$$f^{-1}(f(x))=\begin{cases} \sqrt[3]{x^3}, & x\geq 0,\\ -\sqrt{-(-x^2)}, & x<0, \end{cases}=\begin{cases} x, & x\geq 0,\\ -|x|, & x<0, \end{cases}=x.$$

Una vez que hemos verificado que (12.5) es la función inversa deseada, entonces podemos derivarla

$$(f^{-1})'(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}y^{-2/3}, & y>0,\\ \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}, & y<0. \end{cases}$$

En 0 la función $f^{-1}$ no es diferenciable. ■

**Ejercicio 12.4** *Encontrar la función inversa de $f$ y $h$:*

$$(a)\ f(x)=x^2-1,\ x\leq 0,\qquad (c)\ h(x)=\sqrt{x+1},\ x\geq -1,$$
$$(b)\ f(x)=x^3+1,\qquad (d)\ h(x)=\sqrt[3]{x-1}.$$

**Ejercicio 12.5** *Hallar $(f^{-1})'$, donde*

$$(a)\quad f(x)=x^3+1,\qquad (b)\quad f(x)=(x-1)^3.$$

**Ejercicio 12.6** *Hallar $(f^{-1})'$, donde*

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\geq 0,\\ 1-x^3, & x<0. \end{cases}$$

**Ejercicio 12.7** *Hacer la gráfica de la función inversa de $f(x)=x+[\![x]\!]$ y encontrar la derivada de la función inversa.*

# Capítulo 13

# Función logaritmo y funciones trigonométricas inversas

Hemos aprendido en el Capítulo 12 cómo construir un nuevo tipo de funciones: las funciones inversas. Ahora usaremos esta técnica para construir la función inversa de la función exponencial y de las funciones trigonométricas.

## 13.1. Función logaritmo

Sabemos de (11.3) que $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente y continua en $\mathbb{R}$, entonces el Teorema 12.1 nos asegura que $f^{-1} : R(f) = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ existe, es estrictamente creciente, es continua y más aún

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} = \frac{1}{y}, \quad y > 0. \tag{13.1}$$

En la igualdad anterior hemos usado (12.4) y (11.1). Puesto que $f(0) = 1$, entonces $f^{-1}(1) = 0$. La función $f^{-1}(y)$ se denota por $\ln(y)$ (o por $\log(y)$) y se llama logaritmo natural de $y$. En los siguientes ejemplos se presentan más propiedades de la función logaritmo.

**Ejemplo 13.1** *Verificar que*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \forall x, y > 0. \tag{13.2}$$

**Solución.** Sea $y > 0$ arbitrario fijo. Consideremos la función

$$g(x) = \ln(xy) - \ln(x).$$

Usando la regla de la cadena y (13.1) obtenemos

$$g'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y - \frac{1}{x} = 0, \quad x > 0.$$

Esto significa que, ver el Ejemplo 9.3,

$$g(x) = c, \quad \forall x > 0.$$

Para determinar la constante $c$ evaluemos en 1

$$g(1) = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y).$$

Por lo tanto, $c = \ln(y)$ y así

$$\ln(y) = g(x) = \ln(xy) - \ln(x), \quad \forall x > 0.$$

De esta igualdad obtenemos lo deseado. ■

En particular, si $x > 0$ tenemos que

$$0 = \ln(1) = \ln(xx^{-1}) = \ln x + \ln x^{-1},$$

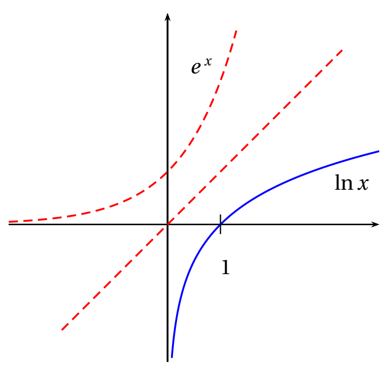
esto implica

$$\ln x^{-1} = -\ln x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(xy^{-1}) = \ln x + \ln y^{-1} \\ &= \ln x - \ln y. \end{aligned} \tag{13.3}$$

De la gráfica de la función exponencial podemos trazar la gráfica de la función logaritmo, ver la página 135,




En particular observamos que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \qquad \lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Más aún, observamos que $\ln x$ es cóncava. En efecto, se tiene que

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x > 0.$$

Análogamente a la función exponencial, podemos usar la regla de la cadena de manera “mecánica” para derivar aquellas funciones que involucran a la función logaritmo.

**Ejemplo 13.2** *Hallar la derivada de*

$$f(x) = \ln(\operatorname{sen} x^2).$$

**Solución.** Sea $h(x) = \ln x$, $g(x) = \operatorname{sen} x^2$, entonces $f(x) = (h \circ g)(x)$. Sabemos que

$$h'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \cos x^2(2x).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= h'(\operatorname{sen} x^2)\cos x^2(2x) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x^2}\cos x^2(2x). \end{aligned}$$

Como se quería. ■

Recuerde que no es necesario hacer todos los pasos del Ejemplo 13.2 al aplicar la regla de la cadena. Se puede derivar de manera “mecánica”:

$$\begin{aligned} (\ln(\operatorname{sen} x^2))' &= \frac{1}{\operatorname{sen} x^2}(\operatorname{sen} x^2)' \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x^2}\cos x^2(2x). \end{aligned}$$

Ya sabemos que si $x > 0$, entonces

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m,$$

donde $x^{1/n}$ es la raíz $n$-ésima de $x$. Las funciones exponencial y logaritmo son funciones trascendentes y nos permiten extender el concepto de potencia: Sea $a > 0$, entonces

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13.4}$$

La definición anterior inmediatamente implica que

$$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1.$$

De la propiedad (11.4) de la función exponencial deducimos

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} \\ &= e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Puesto que la función exponencial es la función inversa de la función logaritmo, ver (12.3), deducimos que

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x \ln a}\right) = x \ln a. \tag{13.5}$$

Como consecuencia de esto y de (13.4) tenemos que

$$(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{y x \ln a} = a^{xy}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 13.3** *Sea $n \in (0,\infty)$. Verificar que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

**Solución.** Vemos que es una indeterminación del tipo $\infty/\infty$, entonces podemos aplicar la Regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n x^n} = 0.$$

Esto significa que la función logaritmo crece más lentamente que cualquier potencia. En particular mas lento que cualquier polinomio. ∎

**Ejercicio 13.1** *Hallar la derivada de las siguientes funciones:*

$$(a)\ \ln(\operatorname{sen} e^{\cos x}), \qquad (c)\ \ln \sqrt[5]{\frac{x^4-1}{x^5+1}},$$
$$(b)\ \ln(\sqrt{6x-1}(4x+5)^3), \qquad (d)\ \ln(\operatorname{sen}(\ln(\operatorname{sen}(\ln x)))).$$

**Ejercicio 13.2** *Asumiendo que (para su verificación ver la página 86 de [3])*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

*calcular los siguientes límites*

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}, \qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}, \qquad (e)\ \lim_{x\to\infty} x^{1/x},$$
$$(b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+xe^{2x})}{x^2}, \qquad (d)\ \lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}, \qquad (f)\ \lim_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{3\sec x}.$$

A continuación veremos cómo usar las propiedades (13.2), (13.3) y (13.5) de la función logaritmo para derivar.

**Ejemplo 13.4** *Hallar la derivada de la función*

$$y = \frac{(\operatorname{sen}^3 x \cos x^2\, (\operatorname{tg} x^8)^9)^{7/2}}{(x+3)^{1/3}}.$$

**Solución.** Aplicamos logaritmo a ambos lados

$$\ln y = \ln \frac{(\operatorname{sen}^3 x \cos x^2 (\operatorname{tg} x^8)^9)^{7/2}}{(x+3)^{1/3}}.$$

Usando las propiedades (13.2), (13.3) y (13.5) obtenemos

$$\ln y \quad = \quad \ln(\operatorname{sen}^3 x \cos x^2 (\operatorname{tg} x^8)^9)^{7/2} - \ln(x+3)^{1/3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{2}\ln(\operatorname{sen}^3 x\cos x^2(\operatorname{tg} x^8)^9)-\frac{1}{3}\ln(x+3)\\
&= \frac{7}{2}[\ln\operatorname{sen}^3 x+\ln\cos x^2+\ln(\operatorname{tg} x^8)^9]-\frac{1}{3}\ln(x+3)\\
&= \frac{7}{2}[3\ln\operatorname{sen} x+\ln\cos x^2+9\ln(\operatorname{tg} x^8)]-\frac{1}{3}\ln(x+3).
\end{aligned}$$

Derivamos implícitamente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{7}{8}\left[3\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x\frac{1}{\cos x^2}(-\operatorname{sen} x^2)(2x)+9\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x^8}\cdot\sec^2 x^8(8x^7)\right]\\
&\quad -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y'=y\left[\frac{21}{8}\cot x-\frac{7}{4}x\operatorname{tg} x^2+63x^7\csc^2 x^8\sec x^8-\frac{1}{3(x+3)}\right].$$

En este caso, si se desea obtener un valor explícito de la derivada se sustituye el valor de $y$, en la igualdad anterior. ■

**Ejercicio 13.3** *Encuentre $y'$, usando derivación implícita,*

$$(a)\ \ y^2+\ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right)-4x=-3,\qquad (b)\ \ y^3+x^2\ln(xy)=5x-3.$$

**Ejercicio 13.4** *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de*

$$x^3-x\ln y+y^3=2x+5,$$

*en el punto* $(2,1)$.

Se dice que los logaritmos (naturales) son de base $e$ y, como sabemos, se construyen encontrando la función inversa de $e^x$. Debido a esto es natural definir el logaritmo de base $a>0$ como la función inversa de la función $a^x$. Para encontrar la inversa hacemos

$$y=a^x,$$

y de esta fórmula despejamos $x$, ver la Sección 12.2. Tomamos logaritmos en ambos lados

$$\ln y=\ln a^x=x\ln a,$$

por lo tanto

$$x=\frac{\ln y}{\ln a},\qquad y>0.$$

En concecuencia, la función logaritmo de base $a>0$ se define como

$$\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a},\qquad y>0.$$

En particular, los logaritmos de base 10 son

$$\log_{10} y=\frac{\ln y}{\ln 10},\quad y>0.$$

**Ejercicio 13.5** *Sea $a > 0$. Derivar la función $y = x^a$, $x > 0$.*

Como sabemos, muchas escalas están basadas en proporciones numéricas. A continuación discutiremos una de ellas.

La escala para medir la intensidad de los terremotos se le conoce como escala Richter. La intensidad $R$ de un terremoto está dada por la expresión

$$R = \log_{10} \frac{E}{I_0},$$

donde $E$ es la intensidad del terremoto medido y $I_0$ es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar. La intensidad del terremoto es medida por un aparato conocido como sismógrafo.

El jueves 19 de septiembre de 1985 tembló con una intensidad de 8.1 grados Richter en la ciudad de México causando pérdidas millonarias y de 6 a 7 mil muertos. Por otra parte, el 13 de abril de 2012 tembló en Aguascalientes con una intensidad de 3 grados Richter, y apenas se percibió.

**Ejemplo 13.5** *¿Cuánto más severo fue el temblor de la ciudad México con respecto al de Aguascalientes?*

**Solución.** Por definición

$$8.1 = \log_{10}\left(\frac{E_{\text{Mex}}}{I_0}\right), \qquad 3 = \log_{10}\left(\frac{E_{\text{Mex}}}{I_0}\right).$$

Esto es equivalente a

$$8.1 = \log_{10}(E_{\text{Mex}}) - \log_{10}(I_0), \qquad 3 = \log_{10}(E_{\text{Mex}}) - \log_{10}(I_0).$$

De lo cual deducimos que

$$\log_{10}(E_{\text{Mex}}) - 8.1 = \log_{10}(I_0) = \log_{10}(E_{\text{Ags}}) - 3.$$

Por lo tanto,

$$\log_{10}\left(\frac{E_{\text{Mex}}}{E_{\text{Ags}}}\right) = \log_{10}(E_{\text{Mex}}) - \log_{10}(E_{\text{Ags}}) = 8.1 - 3.$$

De esto

$$\frac{E_{\text{Mex}}}{E_{\text{Ags}}} = 10^{5.1} = 125,892.541.$$

Por ende $E_{\text{Mex}} = 125,892.541\ E_{\text{Ags}}$, es decir, el temblor de la ciudad de México fue casi de $126,000$ veces superior al de Aguascalientes. ■

**Ejercicio 13.6** *Siguiendo el método de la Sección 10.3 trazar la gráfica de*

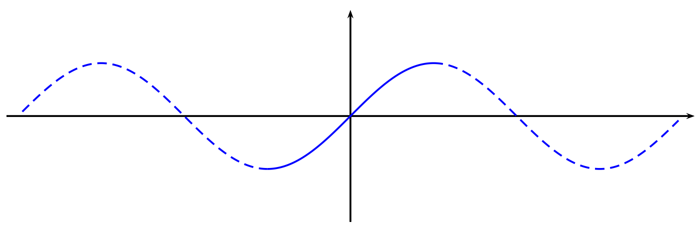
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

*Hay que poner particular atención al comportamiento de $f$ cerca de $0$ y de $\infty$.*

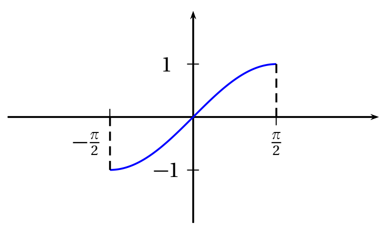
**Ejercicio 13.7** *Encontrar la derivada $n$-ésima de $g(x) = x\ln(1+x)$, $x > -1$.*

## 13.2. Inversa de las funciones trigonométricas

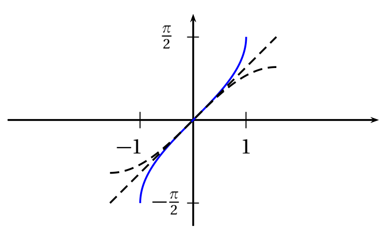
En esta sección estudiaremos la función inversa de $\operatorname{sen} x$, las funciones trigonométricas restantes se dejan al lector. Recordemos que la gráfica de la función $\operatorname{sen} x$ es



De ella vemos que la función $\operatorname{sen} x$ no es inyectiva en todo su dominio, $\mathbb{R}$, por lo tanto no tiene una inversa en este caso. Sin embargo, si nos restringimos a una parte del dominio podemos obtener una función inyectiva. Consideremos entonces la función $\operatorname{sen} x$ restringida, por ejemplo, a $(-\pi/2, \pi/2)$. En este caso la gráfica de interés es




Bajo estas condiciones la función $\operatorname{sen} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$, es inyectiva, estrictamente creciente y además continua. Por lo tanto, del Teorema 12.1 deducimos que en este dominio la función $\operatorname{sen} x$ tiene una inversa estrictamente creciente y continua. La función inversa de $\operatorname{sen} x$ se denota por $\operatorname{sen}^{-1}(y)$ o bien por $\operatorname{arcsen} y$, $y \in (-1.1)$. Recordemos que la gráfica de $\operatorname{sen}^{-1} y$ es, ver la página 144,




Por otra parte, puesto que

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq 0, \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

del Teorema 12.1 deducimos que

$$(\operatorname{sen}^{-1} y)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} y)}, \quad y \in (-1,1). \tag{13.6}$$

Usando la identidad (3.3), nos queda

$$(\cos(\operatorname{sen}^{-1} y))^2 + (\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} y))^2 = 1,$$

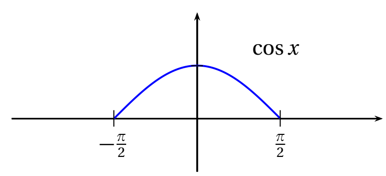
por lo tanto,

$$(\cos(\operatorname{sen}^{-1} y))^2 = 1 - y^2,$$

es decir,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} y) = \pm\sqrt{1-y^2}.$$

De la figura de abajo se aprecia que $\cos x > 0$, cuando $x \in (-\pi/2, \pi/2)$:




Esto implica que debemos descartamos la raíz negativa, quedando

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} y) = \sqrt{1-y^2}. \tag{13.7}$$

Usando esto y (13.6) nos queda

$$(\operatorname{sen}^{-1} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (-1,1).$$

**Ejercicio 13.8** *Encontrar la derivada de la función inversa de cada una de las siguientes funciones*

$$(a)\ \cos x,\ x \in (0,\pi), \qquad (b)\ \tan x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

**Ejemplo 13.6** *Verificar la identidad*

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

**Solución.** Hagamos $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Por definición

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado (13.7). Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Como se quería verificar. ∎

**Ejercicio 13.9** *Verificar las identidades*

$(a)$ $\frac{1}{2}\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad |x|<1,$

$(b)$ $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2-1), \quad 0 \le x < 1,$

$(c)$ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}, \quad |x|<1,\ |y|<1.$

**Ejercicio 13.10** *Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones*

$(a)$ $\cos^4 x - 8\cos^2 x + 3 = 0, \quad x \in (0,\pi),$

$(b)$ $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^2 x = 0, \quad x \in (-\pi/3, 0),$

*con la ayuda de una calculadora.*

**Ejercicio 13.11** *Calcular el valor exacto de*

$(a)$ $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(b)$ $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$, $(c)$ $\tan^{-1}(-1)$, $(d)$ $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

# Capítulo 14

# Aplicaciones

Aquí veremos varios problemas de aplicación del concepto de derivada. Se tratan problemas en los que hay que encontrar un extremo de cierta función. Este tipo de problemas se suelen llamar problemas de "optimización". Cuando se trabaja con problemas de optimización es conveniente seguir los siguientes pasos:

**1:** Primero hay que deducir una expresión (o fórmula) que involucre las cantidades de interés.

**2:** En dicha expresión, por lo general, hay muchas variables, por lo tanto el segundo paso es encontrar relaciones entre ellas.

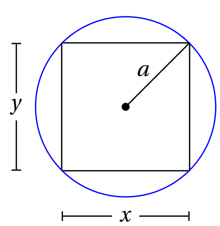
**3:** El tercer paso consiste en obtener una fórmula concreta y estudiar las propiedades de la función correspondiente.

Encotrar una expresión matemática (una función o una ecuación) que represente las características esenciales del problema en cuestión y estudiar las propiedades de dicha expresión se suele llamar modelación matemática.

**Ejemplo 14.1** *La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura de la sección transversal. Hallar las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco de radio $a$.*

**Solución.** Consideremos los pasos mencionados antes.

**1:** Introduzcamos las variables, $x =$ ancho, $y =$ alto de la viga:

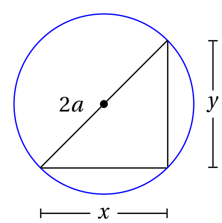


La resistencia, $R$, será

$$R = xy^2, \tag{14.1}$$

donde notamos que hay dos variables.

**2:** No es conveniente trabajar con dos incógnitas, $x$, $y$. Entonces buscamos una expresión que relacione estas cantidades. Con éste propósito consideramos el triángulo rectángulo




Por lo tanto

$$x^2 + y^2 = (2a)^2 \Rightarrow y^2 = (2a)^2 - x^2. \tag{14.2}$$

**3:** Sustituyendo este valor en (14.1) obtenemos

$$R(x) = x(4a^2 - x^2), \quad x > 0.$$

Ahora que hemos encontrado una función de una sola variable trabajemos con ella. Derivamos $R$,

$$R'(x) = 4a^2 - 3x^2,$$

e igualamos a cero para ver que $2a/\sqrt{3}$ es el único punto crítico de $R(x)$, ya que $x > 0$. Puesto que

$$R''(x) = -6x < 0, \quad x > 0,$$

entonces del criterio de la segunda derivada para extremos (ver el Teorema 10.3) se sigue que $2a/\sqrt{3}$ es un máximo. Por lo tanto,

$$\text{anchura} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

y, usando (14.2),

$$\text{altura} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Así obtenemos la dimensión de máxima resistencia. ∎

En lo que sigue ya no escribiremos de manera explícita cada paso, pero se suguiere que el lector los tome en cuenta. Esto le ayudará a resolver nuevos problemas.

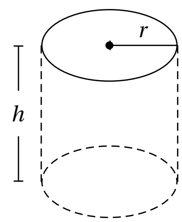
**Ejercicio 14.1** *Exprese el número* 5 *como suma de tres números tales que la suma de dos de ellos sea igual a tres veces el tercero y tales que su producto sea máximo.*

**Ejercicio 14.2** *Un trozo de cable de* 20 *cm de largo se corta en dos partes para formar un cuadrado y un círculo. ¿Cómo debe cortarse el cable de manera que la suma del área de las dos figuras sea lo más pequeña posible?*

**Ejercicio 14.3** *Dos postes de* 20 *m y* 28 *m de altura, respectivamente, se encuentran a* 30 *m de distancia. Dichos postes se han de sujetar desde los extremos superiores al suelo con un sólo cable. ¿Dónde se ha de fijar el punto en el suelo para que la cantidad de cable por emplear sea mínima?*

**Ejemplo 14.2** *Entre los cilindros circulares rectos de volumen fijo $V$, hallar el de menor superficie (incluyendo la superficie de las caras).*

**Solución.** Introduzcamos las variables $r$ y $h$, donde $r$ es el radio de las caras y $h$ es la altura del cilindro




Recordemos que la superficie de las caras es $\pi r^2$ y la superficie del cilindro es $2\pi rh$. Por lo tanto, la superficie pedida será

$$S = 2(\pi r^2) + 2\pi rh. \tag{14.3}$$

Notamos que hay dos variables, $r$ y $h$. Pero, sabemos que el volumen del cilindro $V$, debe ser

$$V = \pi r^2 h,$$

de donde

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \tag{14.4}$$

Sustituyamos esto en (14.3),

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0.$$

Derivamos $S$,

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Igualando $S'$ a 0 obtenemos que $\sqrt[3]{V/2\pi}$ es un punto crítico. Calculamos $S''$ para ver si dicho punto crítico es máximo o mínimo,

$$S''(r) = 4\pi + 4Vr^{-3}, \quad r > 0.$$

Ya que $S'' > 0$, entonces $\sqrt[3]{V/2\pi}$ es un mínimo. Sustituyendo $\sqrt[3]{V/2\pi}$ en (14.4) obtenemos

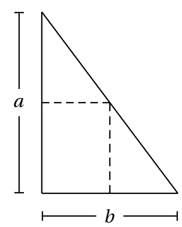
$$h = \frac{2^{2/3}V^{1/3}}{\pi^{1/3}}.$$

Por lo tanto,

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}, \qquad h = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3},$$

son las dimensiones del cilindro de volumen $V$ que minimizan su superficie. ■

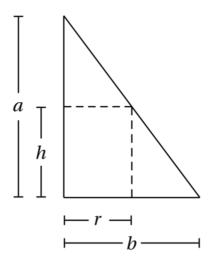
**Ejemplo 14.3** *Encontrar el cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono de $a$ cm de altura y $b$ cm de radio en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan, ver la figura de abajo*



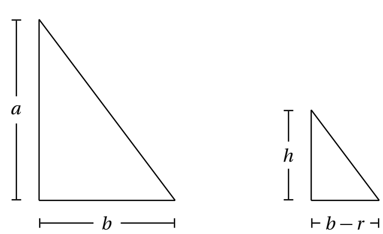

**Solución.** Sean $h$ y $r$ la altura y el radio del cilindro inscrito. Por lo tanto, el volumen del cilindro será

$$V = \pi r^2 h. \tag{14.5}$$

Hay dos variables, necesitamos que $V$ sólo dependa de una variable para poder aplicar las técnicas del Cálculo Diferencial. Para esto observamos que podemos usar la semejanza (ver la Sección 15.7) entre el triángulo grande y el triángulo inferior, por ejemplo:




Separándolos nos queda:



Por lo tanto, de (15.5) tenemos que la proporción de sus lados es la misma, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{b-r}.$$

De aquí

$$h = \frac{a}{b}(b-r). \tag{14.6}$$

Sustituyendo este valor en (14.5) nos da

$$V(r) = \frac{\pi a}{b}(b-r)r^2, \quad 0 \le r \le b.$$

Calculando la derivada de $V$,

$$V'(r) = \frac{a\pi}{b}(2br - 3r^2),$$

e igualando a 0, vemos que $2b/3$ es un punto crítico. Para determinar qué tipo de extremo es calculamos la segunda derivada de $V$,

$$V''(r) = \frac{a\pi}{b}(2b - 6r).$$

Evaluando en $2b/3$ nos queda

$$V''\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{a\pi}{b}\left(2b - 6\cdot\frac{2b}{3}\right) = -2a\pi < 0.$$

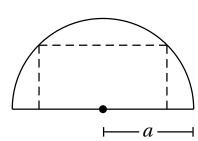
Por lo tanto, $2b/3$ es un punto máximo. Sustituyendo este valor en (14.6) resulta

$$h = \frac{a}{b}\left(b - \frac{2b}{3}\right) = \frac{a}{3}.$$

De esto vemos que las dimensiones del cilindro con volumen máximo que se puede inscribir en un cono de radio $a$ son $a/3$ de altura y $2b/3$ de radio. ■

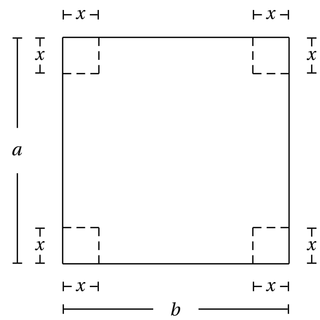
**Ejercicio 14.4** *Se tiene un cono circular recto, circunscrito en una esfera de radio $a$. Halle las dimensiones del cono que hagan máximo su volumen.*

**Ejercicio 14.5** *Determinar las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio $a$, de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro, ver la figura*




**Ejemplo 14.4** *Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón, de $a$ cm de ancho y $b$ cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea máximo.*

**Solución.** Sea $x$ el lado del cuadrado que queremos recortar, ver la figura de abajo




Al recortar el cuadrado de lado $x$ de la hoja de cartón y hacer los dobleces respectivos nos quedará una caja con volumen, $V$,

$$V(x) = x(b-2x)(a-2x), \quad 0 \leq x \leq \text{mín}\{a, b\}.$$

Para calcular los extremos de $V$ derivamos

$$V'(x) = ab - 4(a+b)x + 12x^2.$$

Igualamos $V'$ a 0 y usamos la fórmula general de la ecuación de segundo grado para deducir que

$$\frac{4(a+b) \pm \sqrt{4^2(a+b)^2 - 4 \cdot 12 \cdot ab}}{2 \cdot 12} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

son los posibles valores críticos. (Recuerde que $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, ver la página 176.)

Calculemos la segunda derivada de $V$,

$$V''(x) = -4(a+b) + 24x.$$

Evaluamos

$$\begin{aligned} V''\left(\frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}\right) &= -4(a+b) + 24\left(\frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}\right) \\ &= \pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}. \end{aligned}$$

De esto es inmediato que el volumen es máximo en

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Es decir, este es el valor de $x$ que se debe de cortar la hoja de cartón. ■

**Ejercicio 14.6** *La mancha de impresión de una página ha de ser de* 81 *centímetros cuadrados. Los márgenes superior e inferior son de 3 centímetros cada uno, mientras que los márgenes laterales son de 2 centímetros cada uno. Hallar las dimensiones más económicas dado que el precio de una página es directamente proporcional al perímetro de la misma.*

**Ejemplo 14.5** *Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina cuya pendiente es de* $1/5$ *se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por*

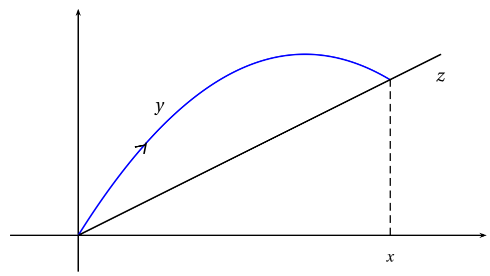
$$y = -0.016x^2 + 1.6x.$$

$(a)$ *¿Cuál es la pendiente de la trayectoria del cohete en el momento del disparo?*

$(b)$ *¿Cuál es la pendiente de la trayectoria cuando choca contra la colina?*

$(c)$ *¿Cuál es la altura máxima del cohete "sobre el suelo"?*

**Solución.** Calculemos la derivada de $y$, $y' = -0.032x + 1.6$. Por lo tanto, la solución de $(a)$ es $y'(0) = 1.6$. Para responder el inciso $(b)$ necesitamos encontrar el momento en el que el cohete choca con la colina. Así, buscaremos el valor de $x$ tal que $y(x) = z(x)$, donde $z(x) = \frac{1}{5}x$. Ver la figura de abajo




Es decir,

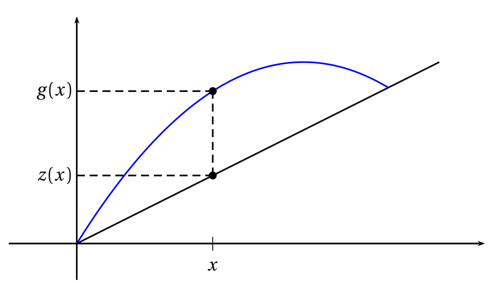
$$-0.016x^2 + 1.6x = \frac{1}{5}x \Rightarrow 0.016x^2 - 1.4x = 0.$$

Hay dos posibilidades, 0 y 87.5. Nótese que 0 es un valor que evidentemente se tendría que encontrar (pues por hipótesis el cohete se dispara del origen de coordenadas). Por lo tanto, la pendiente en el momento de la colisión es $y'(87.5) = 4.4$.

Puesto que el suelo en la colina está determinado por la función $z$, entonces para responder el inciso $(c)$ consideramos la función

$$d(x) = y(x) - z(x), \quad x > 0.$$

De este modo, la función $d$ representa la distancia del suelo de la colina al proyectil, como se muestra en la figura de abajo



Derivamos la función distancia $d$,

$$d'(x) = -0.032x + 1.4.$$

Por lo tanto, 0.032/1.4 es un punto crítico. Calculamos la segunda derivada de $d$,

$$d''(x) = -0.032.$$

Puesto que $d'' < 0$, entonces $0.032/1.4 \approx 0.02285$ es un máximo y la altura (o valor) máximo es $d(0.02285) \approx 0.032$. ∎

**Ejercicio 14.7** *Encuentre el punto de la parábola* $4y = x^2$ *que esté más próximo al punto* $(0,4)$.

**Ejemplo 14.6** *Una agencia de viajes calcula que para vender x "paquetes vacacionales" el precio del paquete debe ser de* $1,800 - 2x$ *pesos,* $1 \leq x \leq 500$. *El costo para la agencia de* $x$ *paquetes es de* $100 + x + 0.01x^2$. *Encuentre:*

$(a)$ *La función de ingreso.*

$(b)$ *La función de ganancia.*

$(c)$ *El número de paquetes que proporcionen la máxima ganancia.*

$(d)$ *La ganancia máxima.*

**Solución.** Para el inciso $(a)$ tenemos que el ingreso será el precio del paquete por el número de paquetes vendidos

$$I(x) = (1,800 - 2x)x.$$

Por otra parte, para el inciso $(b)$ sabemos que la ganancia es el ingreso menos el costo,

$$G(x) = (1,800 - 2x)x - (1,000 + x + 0.01x^2), \quad 1 \leq x \leq 500.$$

Derivamos $G$,

$$G'(x) = 1,799 - 4.02x.$$

Por lo tanto, $x = 447.51$ es un punto crítico para $G$. Puesto que

$$G''(x) = -4.02 < 0,$$

entonces 447.51 es un máximo. Por ende, el número de paquetes que proporcionan una ganancia máxima es 448 paquetes, lo que responde al inciso $(c)$.

Finalmente, para responder el inciso $(d)$, evaluamos $G$ en 448, así la ganancia máxima es $G(448) = 401,540$. Nótese que la ganancia en 500 paquetes es $G(500) = 396,000$. ∎

**Ejercicio 14.8** *Hallar el volumen máximo de un cilindro cuya superficie total (se incluyen las tapas) es igual a* $S$.

**Ejemplo 14.7** *La virulencia de cierta bacteria se mide en escala de* 0 *a* 50 *unidades y viene expresada por la función*

$$V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3, \quad t \geq 0,$$

*donde* $t$ *es el tiempo* (*en horas*) *transcurrido desde que comenzó el estudio* ($t = 0$). *Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las primeras* 6 *horas y los intervalos en que ésta crece y decrece.*

**Solución.** Derivamos $V$,

$$V'(t) = 15 - 18t + 3t^2 = 3(5 - 6t + t^2) = 3(t-1)(t-5). \tag{14.7}$$

Por lo tanto, 1 y 5 son puntos críticos. Derivamos de nuevo la función $V$, $V''(t) = -18 + 6t$. Evaluamos

$$V''(1) = -12 < 0, \quad V''(5) = 12 > 0,$$

para concluir que 1 es un punto máximo y 5 es un punto mínimo.
Consideramos los siguientes casos:
*Caso* $t \in (0,1)$: Es decir

$$0 < t < 1 < 5 \Rightarrow t - 1 < 0, \ \ t - 5 < 0.$$

Por lo tanto $V' > 0$, ver (14.7). En este caso $V$ es creciente.
*Caso* $t \in (1,5)$: Aquí tenemos que

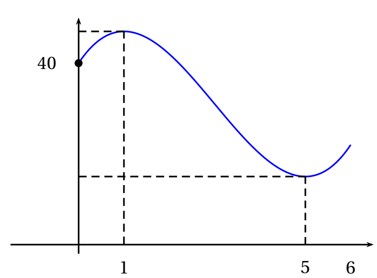
$$1 < t < 5 \Rightarrow t - 1 > 0, \ \ t - 5 < 0.$$

Lo que implica que $V' < 0$, por ende $V$ es decreciente.
*Caso* $t \in (5,6)$: Esto es equivalente a

$$1 < 5 < t < 6 \Rightarrow t - 1 > 0, \ \ t - 5 > 0.$$

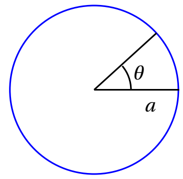
De (14.7) deducimos que $V' > 0$. Entonces $V$ es creciente. ■

La información del Ejemplo 14.7 la podemos interpretar diciendo que al inicio (es decir, en $(0,1)$) el medicamento está actuando lentamente, después (en $(1,5)$) está matando las bacterias, pero luego (en $(5,6)$) pierde su fuerza y las bacterias comienzan a crecer. La gráfica de $V$ ayuda a entender esta interpretación:

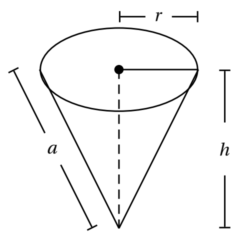



La moraleja es que hay que ser puntuales al tomar las medicinas.

**Ejemplo 14.8** *Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de circulo y radio $a$, y uniendo después las dos orillas rectas del papel restantes. Calcular el volumen del vaso más grande que se puede construir, ver la figura*




**Solución.** Sea $\theta$ el ángulo (en radianes) del sector que queremos quitar. Al quitarlo se formará un vaso con la forma




El volumen del vaso será

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{14.8}$$

Debemos hacer que $V$ dependa de una sola variable. Para esto notamos que

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = a^2 - h^2. \tag{14.9}$$

Sustituyendo $r^2$ en (14.8) nos queda

$$V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 - h^2).$$

Derivamos $V$,

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(aH^2 - 3h^2).$$

Igualando $V'$ a 0 vemos que $a/\sqrt{3}$ es un punto crítico. Derivando $V$ de nuevo, resulta que $V''(h) = -6h < 0$, por lo tanto $a/\sqrt{3}$ es un punto máximo. De esta manera, de (14.9) deducimos que cuando $r$ es $\sqrt{2/3}a$ se obtiene el volumen máximo del vaso. Para encontrar la dependencia entre $r$ y $\theta$ notamos que el perímetro $P$ de la boca del cono es $P = 2\pi r$ y esta longitud resultó al quitar el sector de ángulo $\theta$, es decir $P = a(2\pi - \theta)$. Por lo tanto

$$2\pi r = a(2\pi - \theta) \Rightarrow \theta = \frac{2\pi(a-r)}{a}.$$

De este modo, el ángulo

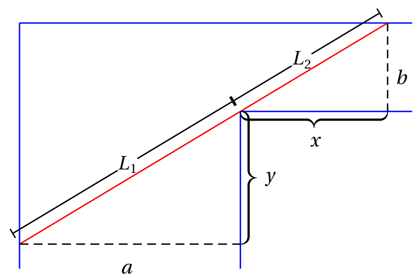
$$\theta = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

nos da el máximo volumen del cono (vaso). ■

Referente al ejercicio anterior, resulta interesante notar que para todos los conos se les debe cortar el mismo ángulo. Es decir, no depende del radio del círculo.

**Ejemplo 14.9** *Dos pasillos de anchuras $a$ y $b$, respectivamente, se encuentran formando un ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder pasar horizontalmente de uno a otro pasillo?*

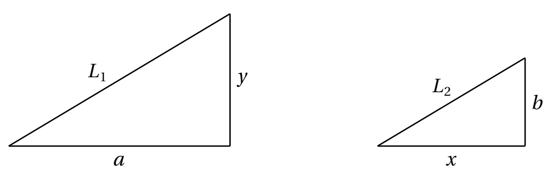
**Solución.** Sean $x, y$ como se indica en la figura




Nótese que la longitud máxima de la escalera que se puede pasar horizontalmente de un pasillo a otro es la mínima distancia que puede tener el segmento de longitud $L = L_1 + L_2$,

$$L = \sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + b^2}. \tag{14.10}$$

Hay dos variables, debido a esto consideramos los siguientes triángulos rectángulos semejantes




Por lo tanto, de la relación (15.5), se sigue que

$$\frac{a}{y} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{y}.$$

Sustituyendo $x$ en (14.10) nos queda

$$L(y) \quad = \quad \sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{\left(\frac{ab}{y}\right)^2 + b^2}$$

$$= \left(1+\frac{b}{y}\right)\sqrt{a^2+y^2}.$$

Derivamos $L$,

$$\begin{aligned} L'(y) &= (a^2+y^2)^{-1/2}\left[y+b-\frac{b}{y^2}(a^2+y^2)\right] \\ &= (a^2+y^2)^{-1/2}\left(y-\frac{a^2b}{y^2}\right). \end{aligned} \tag{14.11}$$

Igualando $L'$ a 0 vemos que $(a^2b)^{1/3}$ es un punto crítico. Consideramos los siguientes casos.
*Caso* $s \in (0,(a^2b)^{1/3})$: Esto implica

$$\begin{aligned} 0 < s < (a^2b)^{1/3} &\Rightarrow 0 < s^3 < a^2b \\ &\Rightarrow s < \frac{a^2b}{s^2} \Rightarrow s - \frac{a^2b}{s^2} < 0. \end{aligned}$$

De (14.11) se sigue que $L'(s) < 0$, cuando $s$ está un poco antes de $(a^2b)^{1/3}$.
*Caso* $s \in ((a^2b)^{1/3},\infty)$: Ahora

$$\begin{aligned} s > (a^2b)^{1/3} &\Rightarrow s^3 > a^2b \Rightarrow s > \frac{a^2b}{s^2} \\ &\Rightarrow s - \frac{a^2b}{s^2} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $L'(s) > 0$, después de $(a^2b)^{1/3}$.

De estos dos casos podemos deducir que $(a^2b)^{1/3}$ es un punto mínimo para $L$ (ver el Teorema 9.3). Por ende,

$$L((a^2b)^{1/3}) = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$$

es la longitud máxima de la escalera que se puede pasar por los pasillos. ■

**Ejercicio 14.9** *Se necesita una línea de potencia para conectar una estación eléctrica situada en la orilla de un río con una isla que está* 4 *km río abajo y a* 1 *km de la orilla. Hallar el costo mínimo para la línea, si un cable subfluvial cuesta 5 mil pesos el metro, mientras que un cable subterráneo cuesta 3 mil pesos el metro.*

**Ejercicio 14.10** *Un mayorista vende cierto artículo en* 20 *pesos la pieza si le piden menos de* 50 *piezas. Si le piden más de 50 piezas (hasta 600 piezas), el precio por pieza se reduce en* 0.02 *multiplicados por el volumen del pedido. ¿Cúal es el pedido que le produce el mayor ingreso a el mayorista?*

**Ejercicio 14.11** *Una carretera que va de norte a sur y otra que va de este a oeste se cruzan en un punto $P$. Un vehículo que viaja hacia el este a* 20 *km/h, pasa por $P$ a las* 10 : 00 *A.M. En ese mismo momento un automóvil que viaja hacia el sur a* 50 *km/h se encuentra a* 2 *km al norte de $P$. Calcular cuándo se encuentran los dos vehículos más cerca uno del otro y cuál es la distancia mínima entre ellos.*

**Ejercicio 14.12** *Un hombre que navega en una barca de remos a* $2$ *km del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en la citada costa a* $6$ *km de dicho punto. El hombre puede remar a razón de* $3$ *km/h y caminar a razón de* $5$ *km/h. ¿Qué debe hacer para llegar a su casa en el menor tiempo posible?*

**Ejercicio 14.13** *La cantidad de agua recogida en* $2013$ (*en millones de litros*) *en cierta presa, como función del tiempo* $t$ (*en meses*), *viene dada por la expresión*

$$V(t)=\frac{10}{(t-6)^2+1}, \quad 0\le t\le 12.$$

(*a*) *¿En qué periodo (en meses) aumentó la cantidad de agua recogida?*

(*b*) *¿En qué instante (mes) se obtuvo la cantidad máxima de agua en la presa?*

(*c*) *¿Cuál es la máxima cantidad de agua?*

# Apéndice: Preliminares

En general, asumimos como ya conocidos los conceptos elementales de conjuntos, de álgebra y de trigonometría; sin embargo, en el presente apéndice fijaremos alguna notación y recordaremos ciertos hechos que es conveniente tener presentes en el desarrollo del texto. No nos proponemos ser exahustivos en esta parte.

## 15.1. Conjuntos

Sea $X$ un conjunto, es decir $X$ es una colección de objetos tales que dado un elemento se puede decidir si éste pertenece o no a dicha colección. Escribimos $x \in X$, para indicar que $x$ es un elemento de $X$, también se suele decir que $x$ está en $X$ (o $x$ pertenece a $X$). Si $x$ no está en $X$, escribimos $x \notin X$. El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Dados dos conjuntos $X, Y$ podemos formar otros nuevos conjuntos:

- La unión de $X$ con $Y$,

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}.$$

- La intersección de $X$ con $Y$,

$$X \cap Y = \left\{x : x \in X \text{ y } x \in Y\right\}.$$

- La diferencia de $X$ con respecto a $Y$,

$$X \backslash Y = \left\{x : x \in X \text{ y } x \notin Y\right\}.$$

Por otra parte, decimos que $X$ es un subconjunto de $Y$, escrito $X \subset Y$, si cada elemento de $X$ está en $Y$, también se dice que $X$ está contenido en $Y$. Por ejemplo,

$$X \cap Y \subset X, \quad X \cap Y \subset Y,$$
$$X \subset X \cup Y, \quad Y \subset X \cup Y,$$

además

$$Y \backslash X \subset Y.$$

En este texto por lo general $X, Y$ serán subconjuntos de los números reales, $Y, X \subset \mathbb{R}$.

## 15.2. Orden en los números reales

En los números reales, $\mathbb{R}$, se define una suma y un producto, con estas operaciones los números reales son un campo (ver por ejemplo [9]). Más aún, hay un orden total, $\leq$. Recordemos que el símbolo $x \leq y$ significa que $y - x = 0$, o bien que $y - x$ es un número positivo.

La relación de orden en $\mathbb{R}$ nos permite definir algunos ejemplos básicos de conjuntos, a saber los intervalos:

- Intervalos abiertos, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,


- Intervalos cerrados, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,


Representaciones análogas tienen los siguientes conjuntos.

- Intervalos semi-abiertos (o semi-cerrados), $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- Rayos abiertos, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
- Rayos cerrados, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

La relación de orden total tiene, entre otras, las siguientes propiedades. Supongamos que $a \leq b$.

- Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $a \pm c \leq b \pm c$.
- Si $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.
- Si $c \leq 0$, entonces $ac \geq bc$.

Una aplicación sencilla de estas dos últimas propiedades es:

**Ejemplo 15.1** *El cuadrado de todo número real es un número no negativo, es decir, es positivo o cero.*

**Solución.** Dado $a \in \mathbb{R}$ tenemos dos posibilidades,

$(i)$ si $a \geq 0$, entonces $a \cdot a \geq 0 \cdot a = 0$,

$(ii)$ si $a \leq 0$, entonces $a \cdot a \geq 0 \cdot a = 0$.

En cualquier caso resulta que $a^2 \geq 0$. ■

Otro hecho, de uso frecuente, es lo siguiente

$$\text{si } ab \geq 0, \text{ entonces } (a \geq 0 \text{ y } b \geq 0) \text{ o bien } (a \leq 0 \text{ y } b \leq 0), \tag{15.1}$$

por otra parte

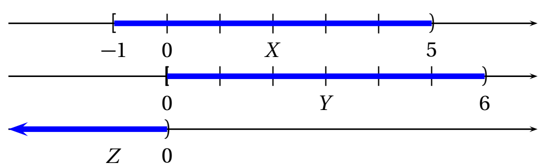
$$\text{si } ab \leq 0, \text{ entonces } (a \geq 0 \text{ y } b \leq 0) \text{ o bien } (a \leq 0 \text{ y } b \geq 0).$$

**Ejercicio 15.1** *Verificar que si* $a > 0$*, entonces* $1/a > 0$*. Análogamente, si* $a < 0$*, entonces* $1/a < 0$*.*

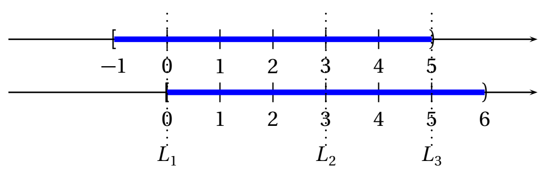
**Ejercicio 15.2** *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leq a < \varepsilon$*, para cada* $\varepsilon > 0$*. ¿Acaso puede ser* $a$ *distinto de* $0$*?*

**Ejemplo 15.2** *Sean* $X = [-1,5)$*,* $Y = [0,6)$*,* $Z = (-\infty,0)$*. Encontrar* $X \backslash Y$*,* $Y \backslash X$*,* $X \cup Y$*,* $X \cap Y$*,* $X \cup Z$*,* $Y \backslash Z$*,* $X \cap Y \cap Z$*.*

**Solución.** En ocasiones ayuda hacer una representación gráfica de cada conjunto:




Para encontrar $X \cap Y$ trazamos líneas verticales y aquellos puntos que se corten dos veces forman la intersección:

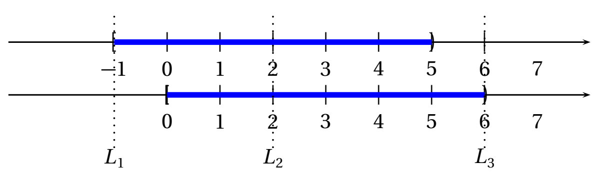



Por ejemplo, notemos que 0 y 3 están en la intersección pues son intersectados dos veces por las líneas $L_1$ y $L_2$, respectivamente. El punto 5 no está en la intersección debido a que la línea $L_3$ toca sólo una vez a 5, pues $5 \notin [-1,5)$. Así $[-1,5) \cap [0,6) = [0,5)$. Análogamente tenemos que

$$[-1,5) \cap [0,6) \cap (-\infty,0) = \emptyset.$$

Recuerde que por $\emptyset$ indicamos al conjunto vacío, es decir, estos conjuntos no tienen elementos en común.

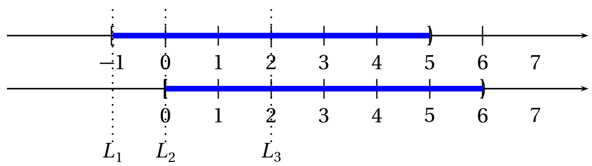
Por otra parte, para encontrar $X \cup Y$ trazamos líneas verticales y la unión de $X$ con $Y$ será aquellos puntos de $X$ o $Y$ que fueron intersectados al menos una vez:




Por ejemplo, $-1$ y 2 están en la unión pues $L_1$ toca una vez a $-1$ y $L_2$ toca dos veces a 2. Sin embargo, 6 no está en la unión pues $L_3$ no lo toca debido a que $6 \notin [0,6)$. Así $[-1,5) \cup [0,6) = [-1,6)$. Procediendo de la misma manera vemos que

$$[-1,5) \cup [0,6) = [-1,6) \cup (-\infty,0) = (-\infty,6).$$

Para calcular $X \setminus Y$ trazamos una línea vertical en cada punto de $X$, dicho punto estará en $X \setminus Y$ si no intersecta a $Y$:




Por ejemplo, $-1$ está en $[-1,5)\setminus[0,6)$, puesto que $L_1$ lo intersecta sólo una vez. Pero los puntos 0 y 2 no están en $[-1,5)\setminus[0,6)$, puesto que las líneas verticales, $L_2$ y $L_3$, los intersectan dos veces, respectivamente. ■

**Ejercicio 15.3** *Verificar que*

$$(a,b)\cap(c,d) = (\text{máx}\{a,c\}, \text{mín}\{b,d\}),$$
$$[a,b]\cup[c,d] = [\text{mín}\{a,c\}, \text{máx}\{b,d\}].$$

## 15.3. Radicación

Sea $n$ un entero positivo y $b$ un número real. Decimos que un número real $a$ es una raíz $n$-ésima de $b$ si

$$a^n = b.$$

El número $a$ se denota por $\sqrt[n]{b}$, si $a > 0$, y por $-\sqrt[n]{b}$ si $a < 0$.

**Ejemplo 15.3** *Si* $n = 4$ *y* $b = 16$, *entonces* 2 *y* $-2$ *son raíces cuartas de* 16.

**Solución.** En efecto,

$$(2)^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16 \quad \text{y} \quad (-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16.$$

Así tenemos que

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{y} \quad -\sqrt[4]{16} = -2.$$

Como se quería. ■

**Ejemplo 15.4** *Si* $n = 3$ *y* $b = -27$, *entonces* $-3$ *es una raíz cúbica de* $-27$.

**Solución.** Puesto que $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$, entonces $\sqrt[3]{-27} = -3$. ■

Nótese que todo número real negativo no tiene raíces $n$-ésimas pares, la razón es que toda potencia par produce un número no negativo (ver el Ejemplo 15.1).

**Ejemplo 15.5** *Si* $n = 2$ *y* $b = -4$, *entonces no existe un número real* $a$ *tal que*

$$a^2 = -4.$$

*Por lo tanto, la expresión* $\sqrt[2]{-4}$ *no representa a un número real.*

**Ejercicio 15.4** *Encontrar el error en el siguiente argumento:*

$$-1 = (-1)^{1/1} = (-1)^{2/2} = \left((-1)^2\right)^{1/2} = (1)^{1/2} = 1.$$

## 15.4. Factorización de un trinomio cuadrado

Una expresión de la forma

$$ax^2 + bx + c \tag{15.2}$$

se llama trinomio de segundo grado y frecuentemente se requiere expresar como producto de factores; a este proceso se le conoce como factorización.

Por otra parte, una ecuación de segundo grado, en la variable $x$, es una expresión de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{15.3}$$

donde $a \neq 0, b, c$ son constantes. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R}$. Un número $r \in \mathbb{R}$ se llama raíz real de $f$ si $f(r) = 0$. Las raíces o soluciones de (15.3) están dadas por la fórmula general de segundo grado, es decir,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante y (15.3) no tiene raíces reales si $\Delta < 0$. Si $\Delta \geq 0$, entonces podemos usar las raíces de (15.3) para factorizar el trinomio (15.2) así

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

**Ejercicio 15.5** *Factorizar los trinomios donde sea posible (ver el Ejercicio 2.2):*

$$(a)\ 21x^2 - 10x + 13, \quad (b)\ 6x^2 - 7x + 2, \quad (c)\ x^4 - 2x^2 + 1, \quad (d)\ 4x^2 - 13x - 12.$$

**Ejercicio 15.6** *Si una ecuación de la forma (15.3) tiene una raíz real $r_1$, justificar por qué también tiene otra raíz real. Más aún, dar la otra raíz en términos de $r_1$.*

## 15.5. Productos notables

Hay algunos productos de números reales que ocurren frecuentemente y es conveniente recordar su desarrollo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

- Factorizaciones prácticas:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \quad \text{diferencia de cuadrados,} \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

- Binomio de Newton:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \cdots \end{aligned}$$

A continuación damos un ejemplo donde se usa la diferencia de cuadrados y las propiedades de las desigualdades.

**Ejemplo 15.6** *Determinar* $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 16\right\}$ *en términos de intervalos.*

**Solución.** Usando diferencia de cuadrados escribimos

$$\begin{aligned} x^4 \geq 16 \quad &\Leftrightarrow \quad x^4 - 16 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2-4)(x^2+4) \geq 0. \end{aligned}$$

Puesto que $x^2 + 4$ siempre es positivo tenemos que

$$x^4 \geq 16 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = x^2 - 4 \geq 0.$$

Usando la propiedad (15.1) nos queda

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2 \geq 0,\ x+2 \geq 0) \text{ o bien } (x-2 \leq 0,\ x+2 \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \geq 2,\ x \geq -2) \text{ o bien } (x \leq 2,\ x \leq -2). \end{aligned}$$

Lo anterior lo podemos expresar así

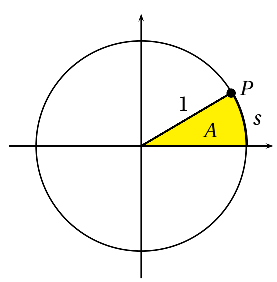
$$\begin{aligned} (x-2)(x+2) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [2,\infty) \cap [-2,\infty) \text{ o } x \in (-\infty, 2] \cap (-\infty, -2] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [2,\infty) \text{ o } x \in (-\infty,-2] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [2,\infty) \cup (-\infty,-2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 16\right\} = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$. ■

**Ejercicio 15.7** *(a) Expresar el conjunto* $A = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 4x + 1 \geq 0\right\}$*, en términos de intervalos.*
*(b) Resolver la desigualdad* $(x+2)/(1-x) < 1$, $(x \neq 1)$.

## 15.6. Área de un sector

Sea $A$ el área determinada por un arco en el círculo unitario de longitud $s$ y el segmento de recta que va de $(0,0)$ a $P$, como se indica en la figura de abajo



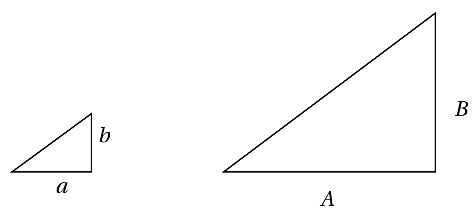

Nótese que la longitud del segmento $s$ y el área inducida por éste varían en la misma proporción. Por ejemplo, si la longitud del segmento es la mitad de la longitud de la circunferencia unitaria, es decir $\pi$, entonces el área inducida será la mitad del área del círculo unitario, es decir $\pi/2$. En general se tiene el siguiente hecho:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Proporción de la longitud del arco } s,\\ \text{con respecto al perímetro del círculo unitario}\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Proporción del área determinada por el arco } s,\\ \text{con respecto al área del círculo unitario.}\end{array}\right.$$

En símbolos
$$\frac{s}{2\pi}=\frac{A(s)}{\pi}.$$
Así, el área determinada por un arco de longitud $s$, en el círculo unitario, es
$$A(s)=\frac{s}{2}. \tag{15.4}$$

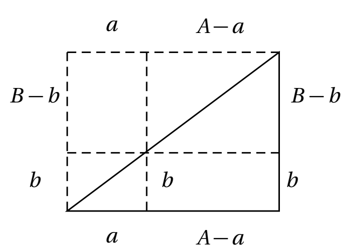
## 15.7. Proporciones en triángulos rectángulos semejantes

Los triángulos semejantes son figuras geométricas como éstas




Es decir, dos triángulos son semejantes si uno de ellos es un alargamiento, proporcional, del otro. Proporcional significa que cada parte del triángulo se estira en la misma proporción.

Consideremos la siguiente figura




En ella se puede apreciar inscrito, en la parte inferior izquierda, un triángulo de base $a$ y altura $b$. Por otra parte, se forman dos triángulos grandes de igual área, uno inferior de línea continua y otro superior de línea punteada. Además note que en cada uno de ellos hay inscritos dos triángulos y un rectángulo. Los respectivos triángulos tienen la misma área, por ende el área del rectángulo inscrito en el triángulo superior es la misma que el área del rectángulo inscrito en el triángulo inferior. Es decir,

$$(B-b)a=(A-a)b,$$

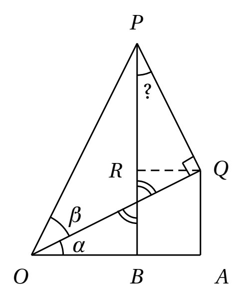
en consecuencia, $Ba=Ab$, lo que equivale a

$$\frac{b}{a}=\frac{B}{A}. \tag{15.5}$$

Éste es el significado preciso de que el triángulo grande es un alargamiento proporcional del pequeño. En efecto, significa que el crecimiento de los lados $A$ y $B$ fue en la misma proporción, por eso la igualdad.

## 15.8. Fórmula para la suma de ángulos del seno y del coseno

Con la finalidad de obtener la fórmula para la suma de ángulos del seno y del coseno consideramos la siguiente figura




donde suponemos que la distancia del segmento $OP$ es 1. El segmento $OQ$ es tal que $OQP$ es un triángulo rectángulo, por lo tanto

$$QP=\operatorname{sen}\beta,\quad OQ=\cos\beta.$$

Análogamente, del triángulo rectángulo $OAQ$ deducimos que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{AQ}{OQ}=\frac{AQ}{\cos\beta},\quad \cos\alpha=\frac{OA}{OQ}=\frac{OA}{\cos\beta}. \tag{15.6}$$

Por otra parte, nótese que los ángulos señalados con línea doble son de la misma magnitud, y debido a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman $180^0$, entonces ? debe ser $\alpha$. De esto concluimos que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{RQ}{QP}=\frac{RQ}{\operatorname{sen}\beta},\quad \cos\alpha=\frac{RP}{QP}=\frac{RP}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Usando estas expresiones y (15.6) se sigue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= BP = BR + RP = AQ + RP \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta, && (15.7)\\
\cos(\alpha+\beta) &= OB = OA - BA = OA - RQ \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. && (15.8)
\end{aligned}$$

Obteniéndo así las expresiones deseadas.

# Soluciones a ejercicios seleccionados

La mejor manera de aprender matemáticas es haciendo matemáticas. Se recomienda no ver la solución hasta después de un buen tiempo de haber intentado resolver el ejercicio.

## Capítulo 2

**Ejercicio 2.1:** **(a)** No es función, hay diferentes personas con el mismo nombre. **(b)** Si es función, si dos personan tienen la misma CURP ésta se cambia para que sean distintas.

**Ejercicio 2.5:** **(a)** $-2$. **(b)** $-2$. **(c)** $2h^7-16h^6+56h^5-112h^4+135h^3-92h^2+27h+2$. **(d)** $2h^7+16h^6+56h^5+112h^4+135h^3+92h^2+27h-2$.

**Ejercicio 2.6:** **(a)** Impar. **(b)** Impar. **(c)** Par. **(d)** Impar. **(e)** Nada. **(f)** Par.

**Ejercicio 2.8:** **(a)** $D(f)=\mathbb{R}$, $R(f)=\cup_{n\in\mathbb{Z}}[2n,2n+1)$, $f$ es inyectiva y no es sobre pues no hay $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=1.5$. **(b)** $D(h)=[0,\infty)\backslash\{1\}$, $R(h)=[1,\infty)\backslash\{2\}$, $h$ es inyectiva y no es sobre, pues no hay un $x\in\mathbb{R}$ tal que $h(x)=2$. **(c)** $D(g)=\mathbb{R}$, $R(g)=[0,1)$, no es inyectiva y no es sobre. **(d)** $D(k)=[0,\infty)$, $R(k)=[-1,\infty)$, $k$ es inyectiva y no es sobre (en $\mathbb{R}$).

**Ejercicio 2.11:** Usar que $f(x)=x^3+9x^2+27x+25=(x+3)^3-2$.

**Ejercicio 2.13:** **(a)** $|ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\,|b|$. **(b)** $ab\le|ab|\Rightarrow 2ab\le 2|ab|\Rightarrow a^2+b^2+2ab\le a^2+b^2+2|ab|=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\Rightarrow(a+b)^2\le(|a|+|b|)^2$. Extrayendo raíz cuadrada se obtiene el resultado. **(c)** Por casos: (i) $a\ge 0\Rightarrow -|a|=-a\le 0\le a=|a|$, (ii) $a<0\Rightarrow -|a|=-(-a)=a<0<-a=|a|$. **(e)** Supongamos que $|a|\le c\Rightarrow a\le|a|\le c$ y $-c\le-|a|\le a$, de esto se sigue lo deseado. Supongamos ahora que $-c\le a\le c$. Por casos: (i) $a\ge 0\Rightarrow|a|=a\le c$, (ii) $a<0\Rightarrow|a|=-a\le c$. **(d)** Observamos que $|b|=|b-a+a|\le|b-a|+|a|=|(-1)(a-b)|+|a|=|-1||a-b|+|a|=|a-b|+|a|\Rightarrow-|a-b|\le|a|-|b|$. Por otra parte $|a|=|a-b+b|\le|a-b|+|b|\Rightarrow|a|-|b|\le|a-b|$, la conclusión se sigue del inciso (e).

## Capítulo 3

**Ejercicio 3.1:** **(a)** $D(f+g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f+g)(x)=2x-\frac{1}{2x}$, $D(f-g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f-g)(x)=-\frac{3}{2x}$, $D(fg)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(fg)(x)=x^2-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$, $D(f/g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f/g)(x)=\frac{2x^2-2}{2x^2+1}$.

**(b)** $D(f+g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f+g)(x)=x+\frac{1}{x}$, $D(f-g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f-g)(x)=x-\frac{1}{x}$, $D(fg)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(fg)(x)=1$, $D(f/g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f/g)(x)=x^2$.

**(c)** $D(f+g)=\mathbb{R}\backslash(-2,2)$, $(f+g)(x)=5x-1+\sqrt{x^2-4}$, $D(f-g)=\mathbb{R}\backslash(-2,2)$, $(f-g)(x)=5x-1-\sqrt{x^2-4}$, $D(fg)=\mathbb{R}\backslash(-2,2)$, $(fg)(x)=(5x-1)\sqrt{x^2-4}$, $D(f/g)=\mathbb{R}\backslash[-2,2]$, $(f/g)(x)=\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-4}}$.

**(d)** $D(f+g)=\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=7x^4+x^3+7x+1$, $D(f-g)=\mathbb{R}$, $(f-g)(x)=-7x^4+3x^3-x+1$, $D(fg)=\mathbb{R}$, $(fg)(x)=14x^7-2x^6+21x^5+12x^4-x^3+12x^2+4x$, $D(f/g)=\mathbb{R}\backslash\{0,-0.78484\}$, $(f/g)(x)=\frac{3x+2x^3+1}{x(7x^3-x^2+4)}$.

**Ejercicio 3.2:** **(a)** No es polinomio. **(b)** Es polinomio de grado 3. **(c)** No es polinomio. **(d)** Es polinomio de grado 2.

**Ejercicio 3.4:** **(a)** No. **(b)** Si $f(x)=\frac{3+x^2}{2x}$, $g(x)=-\frac{x^2-6x+3}{2x}$.

**Ejercicio 3.5:** Observemos primero que

$$D(f)=\mathbb{R},\ \ D(g)=\begin{cases}\mathbb{R}, & n \text{ impar},\\ [0,\infty), & n \text{ par}.\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
D(f\circ g) &= \{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}\\
&= \begin{cases}\{x\in\mathbb{R}: x^{1/n}\in\mathbb{R}\}, & n \text{ impar},\\ \{x\in[0,\infty): x^{1/n}\in\mathbb{R}\}, & n \text{ par},\end{cases}\\
&= \begin{cases}\mathbb{R}, & n \text{ impar},\\ [0,\infty), & n \text{ par},\end{cases}\\
(f\circ g)(x) &= f(g(x))=(g(x))^m=(x^{1/n})^m=x^{m/n}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
D(g\circ f) &= \{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}\\
&= \begin{cases}\{x\in\mathbb{R}: x^{m}\in\mathbb{R}\}, & n \text{ impar},\\ \{x\in\mathbb{R}: x^{m}\in[0,\infty)\}, & n \text{ par},\end{cases}\\
&= \begin{cases}\mathbb{R}, & n \text{ impar},\\ [0,\infty), & n \text{ par}, m \text{ impar},\\ \mathbb{R}, & n \text{ par}, m \text{ par},\end{cases}\\
(g\circ f)(x) &= g(f(x))=(f(x))^{1/n}=(x^m)^{1/n}=x^{m/n}.
\end{aligned}$$

De esto podemos apreciar que la igualdad $(x^m)^{1/n}=x^{m/n}=(x^{1/n})^m$ sólo se cumple cuando $n$ es impar ($x\in\mathbb{R}$) o bien cuando $n$ es par y $m$ es impar ($x\in[0,\infty)$).

**Ejercicio 3.6:** **(a)** $D(f\circ g)=D(g\circ f)=\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=x^{10}+6x^6-2x^5+9x^2-6x+2$, $(g\circ f)(x)=x^{10}+5x^8+10x^6+10x^4+8x^2+3$. **(b)** $D(f\circ g)=D(g\circ f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^4}=(g\circ f)(x)$.

**Ejercicio 3.7:** $V=\frac{1}{400\pi}l$.

**Ejercicio 3.8:** **(a)** El área sombreada es $11\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ el área del cuadrado. **(b)** El área sombreada es $11\left(\frac{4}{\pi}-1\right)$ el área del circulo. El truco es hacer un giro sobre la mitad de la punta de la flecha.

**Ejercicio 3.9: (a)** Segundo cuadrante. **(b)** Cuarto cuadrante. **(c)** Cuarto cuadrante. **(d)** En ningún cuadrante.

**Ejercicio 3.10: (a)** $315^0$. **(b)** $135^0$. **(c)** $\frac{14}{15}\pi$ rad. **(d)** $\frac{5}{12}\pi$ rad.

**Ejercicio 3.11:** $\frac{2}{5}$ rad.

**Ejercicio 3.12: (a)**

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\cot(x) &= \operatorname{sen}(x)+\cos(x)\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}=\csc(x).\end{aligned}$$

**(b)**

$$\frac{\csc^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}=\frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}=\cot^2(\theta).$$

**(c)**

$$1-2\operatorname{sen}^2(x)=1-2(1-\cos^2(x))=2\cos^2(x)-1.$$

**(d)**

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-\cot(x)}{\tan(x)+\cot(x)} &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}}{\frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}=\frac{\operatorname{sen}^2(x)-1+\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+1-\operatorname{sen}^2(x)}\\ &= 2\operatorname{sen}^2(x)-1.\end{aligned}$$

**Ejercicio 3.13: (a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **(b)** $-2$. **(c)** $\frac{1}{2}$. **(d)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **(e)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **(f)** $-\frac{1}{2}$. **(g)** $-\sqrt{3}$. **(h)** $-\frac{1}{2}$.

**Ejercicio 3.14: (a)** $\left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$. **(b)** $\left\{0, \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$.

**Ejercicio 3.17: (a)** $\left(\frac{3}{2}+2n\right)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **(b)** $n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **(c)** $\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **(d)** $(1+2n)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **(e)** $\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **(f)** $2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

## Capítulo 4

**Ejercicio 4.1: (a)** 5. **(b)** $-2$.

**Ejercicio 4.2: (a)** No existe, cerca de $-1$ crece indefinidamente. **(b)** 6.

**Ejercicio 4.3:** Si $x\geq 0$, entonces $x \operatorname{sig}(x)=x\cdot 1=x=|x|$. Si $x<0$, entonces $x\operatorname{sig}(x)=x(-1)=-x=|x|$.

**Ejercicio 4.4: (a)** En ambos casos es 2. **(b)** 2 por la derecha y 0 por la izquierda.

**Ejercicio 4.5: (a)** 0. **(b)** 0.

**Ejercicio 4.6: (a)** 0. **(b)** 4. **(c)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **(d)** 12.

**Ejercicio 4.7: (a)** El límite por la izquierda es $-1$ y el de la derecha es 1. **(b)** Cerca de 0 la función no es acotada. **(c)** Cerca de 3 por la izquierda la función no es acotada y el límite por la derecha es 0 (de hecho basta que la función no esté acotada por la izquierda para que el límite no exista).

**Ejercicio 4.8: (a)** $-\frac{16}{3}$. **(b)** $\sqrt[5]{19}\sqrt{29}$. **(c)** 2. **(d)** $-1$. **(e)** 6. **(f)** $\frac{729}{8}$. **(g)** $-\frac{2}{3}$. **(h)** $\frac{1}{2}$. **(i)** $-\frac{1}{2}$.

**Ejercicio 4.9:** **(a)** 1. **(b)** 1. **(c)** 0. **(d)** La función no está definida a la izquierda de 6. **(e)** $\frac{1}{8}$. **(f)** 0. **(g)** La función no está definida a izquierda de 5. **(h)** 0.

**Ejercicio 4.10:** **(a)** 0. **(b)** $\frac{1}{2}$. **(c)** 1. **(d)** 0. **(e)** 64. **(f)** $\frac{5}{4}$. **(g)** 0. **(h)** 2. **(i)** 0.

## Capítulo 5

**Ejercicio 5.2:** **(a)** $\frac{2}{3}$. **(b)** 3. **(c)** 0. **(d)** 3. **(e)** $\frac{2}{3}$. **(f)** 0.

**Ejercicio 5.3:** **(a)** El eje $x$ es una asíntota horizontal y

$$\frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{23}\sqrt{108}+\frac{25}{54}}}+\left(\frac{1}{108}\sqrt{23}\sqrt{108}+\frac{25}{54}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}=0.75488$$

es una asíntota vertical. **(b)** El eje $x$ es una asíntota horizontal y $1,-3$ son asíntotas verticales. **(c)** No tiene asíntotas.

**Ejercicio 5.4:** Las asíntotas verticales son $1,-2$ y la asíntota oblicua es $2x+1$.

**Ejercicio 5.5:** **(a)** $D(f)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\backslash\{-1,0,1\}$, $R(f)=\mathbb{R}$. Asíntotas verticales en $-1,0,1$. **(b)** $D(g)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\backslash\{-1,1\}$, $R(g)=\mathbb{R}$. Asíntotas verticales en $-1,1$.

## Capítulo 6

**Ejercicio 6.1:** Primero hay que notar que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Usando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\\
&= 2\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\\
&\quad\times\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]\\
&= 2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-2\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\\
&\quad+2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}-2\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\\
&= 2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)\\
&\quad-2\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)\\
&= 2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\\
&= \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 6.2:** **(a)** En todo $\mathbb{R}$. **(b)** En los intervalos $(-\infty,2)$, $(2,3)$ y $(3,\infty)$.
**Ejercicio 6.3:** Nótese que $x \to c$ si y sólo si $h = x - c \to 0$, entonces

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x-c\to 0} f((x-c)+c) = \lim_{h\to 0} f(h+c) = f(c).$$

**Ejercicio 6.4:** Para $\frac{1}{2}, -1$.
**Ejercicio 6.7:** La función es

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t \in (8,9], \\ 5+2, & t \in (9, 9:30], \\ 5+4, & t \in (9:30, 10], \\ 5+6, & t \in (10, 10:30], \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ 5+28, & t \in (15, 15:30], \\ 35, & t \in (15:30, 21:00]. \end{cases}$$

La función es continua en los intervalos abiertos y discontinua en los extremos de los intervalos. A las 4 horas y media se deben pagar 21 pesos.
**Ejercicio 6.8:** **(a)** No es continua en 1, y es una discontinuidad evitable:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1, \\ 1/x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

**(b)** No es continua en 5 y es una discontinuidad evitable, $\tilde{v}(x) = \sqrt{x+1}$.
**Ejercicio 6.9:** Trazar los segmentos de línea de manera que se unan los siguientes puntos: (0,1), (1,2), (2,0), (3,2), (4,0), (5,1), (6,0), (7,1), (8,0).
**Ejercicio 6.10:** Nótese que $f(x) = x \in (-1,2)$, entonces $-1 < f(x) < 2$. Por lo tanto $-1$ y 2 son cotas inferior y superior para la gráfica de $f$. Más aún, veamos que $f$ no se alacanza su máximo, el mínimo se trabaja de manera similar. En efecto, supongamos que existe un $x_0 \in (-1,2)$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para cada $x \in (-1,2)$. Nótese que

$$x_0 < \frac{x_0+2}{2} < 2$$

por ende

$$x_0 = f(x_0) \geq f\left(\frac{x_0+2}{2}\right) = \frac{x_0+2}{2} \Rightarrow x_0 \geq 2.$$

Lo que contradice el hecho $x_0 \in (-1,2)$. No hay contradicción pues el intervalo es abierto.
**Ejercicio 6.11:** No alcanza su máximo pues cerca de 0 la función tiende a $\infty$ y cerca de 1 la función tiende a $-\infty$, por lo tanto tampoco alcanza su mínimo.
**Ejercicio 6.12:** $f(0) > 0$ y $f(1) < 0$, entonces el resultado es consecuencia del Teorema del Valor Intermedio.
**Ejercicio 6.13:** Sabemos que el $A(r) = \pi r^2$, $r \in [0,10]$. Puesto que $A(0) = 0 < 250 < 300 < A(10)$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe un $r_0 \in (0,10)$ tal que $A(r_0) = 250$.

**Ejercicio 6.14:** Sea $x$ la base y $y$ la altura de los rectángulos de perímetro $p$, entonces $2x+2y=p$. El área será

$$A = xy = x\left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Puesto que $0 \le x \le \frac{p}{2}$, entonces por la propiedad (II) existe un punto $x_0 \in [0, \frac{p}{2}]$ tal que $A(x_0)$ es máximo. Más aún, completando el cuadrado tenemos

$$A(x) = \frac{p^2}{4^2} - \left(\frac{p}{4} - x\right)^2,$$

de lo cual se sigue que la base que da máxima altura es $x = \frac{p}{4}$. Así $y = p/4$.

**Ejercicio 6.15:** Nótese que $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio $f$ tiene una raíz en $(1,2)$. Para estimarla ahora evaluemos la función $f$ en $3/2$,

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0,$$

lo que nos indica que la raíz se encuentra en el intervalo $(3/2,2)$. Ahora evaluamos la función $f$ en $7/4$

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{71}{64} > 0.$$

Por lo tanto la raíz se encuentra en $(3/2, 7/4)$. Dos pasos más, evaluamos $f$ en $13/8$ y en $25/16$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{13}{8}\right) &= \frac{213}{512} > 0, \\ f\left(\frac{25}{16}\right) &= \frac{521}{4096} > 0. \end{aligned}$$

De este modo, la raíz se encuentra en el intervalo $(3/2, 25/16) = (1.5, 1.5625)$. Por lo tanto, la raíz debe ser del orden de 1.5. En realidad la raíz es $x = 1.5321....$ Lo que significa que pudimos aproximar la raíz al primer decimal.

## Capítulo 7

**Ejercicio 7.1:** **(a)** $f'(x) = -(x-2)^{-2}$, $x \in \mathbb{R}\backslash 2$, $y = -\frac{1}{16}x - \frac{3}{8}$, $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, $y = 4 - x$. **(b)** $f'(x) = 6x^5 - 8x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $y = -128x - 224$, $y = 0$, $y = 1242x - 3159$. **(c)** $f'(x) = 3x^2$, si $x \ge 0$, $f'(x) = 2x$, si $x < 0$, $y = -4x - 4$, $y = 0$, $y = 27x - 54$.

**Ejercicio 7.3:** **(a)** $108t^{11} - 72t^3$. **(b)** $\frac{1}{(s-1)^2}\left(18s^3 - 27s^2 + 7\right)$. **(c)** $\frac{1}{(x^2+1)^2}(70x^{10} + 30x^9 + 40x^8 + 20x^7 - 70x^6 - 378x^5 - 87x^4 - 696x^3 - 348x^2 + 348x + 87)$. **(d)** $180x^3 - 27x^2 - 50x + 5$. **(e)** $-\frac{1}{x^5}\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right)$. **(f)** $\frac{k}{(k^2+2k+3)^2}(110k^{24} + 230k^{23} + 360k^{22} + 95k^{21} + 200k^{20} + 315k^{19} + 3k^5 + 8k^4 + 15k^3 + 2k + 6)$.

**Ejercicio 7.4:** **(a)** $y = 53x + 52$. **(b)** $y = 1$.

**Ejercicio 7.5:** **(a)** $f'(x) = \begin{cases} 1, & -3 < x < -2, \\ 0, & -2 < x < 2, \\ -1, & 2 < x < 3. \end{cases}$

**(b)** $f'(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ 2x, & -1<x<1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$

**Ejercicio 7.6:** Hay tres posibles puntos, el primero es $(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2})$, el segundo es $(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2})$ y el tercero es $(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

**Ejercicio 7.7:** Hay dos posibles puntos, $(1,0)$ y $(-\frac{1}{3},-\frac{40}{27})$.

**Ejercicio 7.8:** **(a)** 1. **(b)** $-\frac{1}{4}$. **(c)** $\frac{1}{64}$. **(d)** 2. **(e)** $\frac{300}{3481}$.

**Ejercicio 7.9:** **(a)** $\frac{1}{2}\frac{(2r+5)^7}{(r+2)^4}\left(6r^2+13r+5\right)$. **(b)** $404x\left(\cos\left(x^2+1\right)^{202}\right)\left(x^2+1\right)^{201}$.

**(c)** $-\frac{1}{(x^2-4)^9}\left(15x^2+4\right)$. **(d)** $\frac{16}{t^{17}}\left(t^4-1\right)^7\left(t^4+1\right)$.

**(e)** $120x^5(\cos(\cos^5(\frac{1}{2}\cos 2x^6-\frac{1}{8}\cos 4x^6-\frac{3}{8}))\cos^4(\frac{1}{2}\cos 2x^6-\frac{1}{8}\cos 4x^6-\frac{3}{8})$ $\times\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\cos 2x^6-\frac{1}{8}\cos 4x^6-\frac{3}{8})\cos x^6)(\frac{3}{4}\operatorname{sen} x^6-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x^6)$.

**(f)** $(\cos(x+\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}((x+\operatorname{sen} x)))))(\cos(x+\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} x))+\cos(x+\operatorname{sen}(x$ $+\operatorname{sen} x))\cos(x+\operatorname{sen} x)+\cos(x+\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} x))\cos x\cos(x+\operatorname{sen} x)+1)$.

**Ejercicio 7.10:** $k(2)=-16$, $k'(2)=45$.

**Ejercicio 7.11:**

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds} &= \frac{dw}{dz}\frac{dz}{ds}\\ &= (13z^{12}+2z^{-2})(95(s^{12}+1)^{94}+12s^{11})\\ &= \left(\frac{2}{(s^{12}+1)^{190}}+13\left(s^{12}+1\right)^{1140}\right)\left(95\left(s^{12}+1\right)^{94}+12s^{11}\right).\end{aligned}$$

**Ejercicio 7.12:** **(a)** $g'(x+g(a))$. **(b)** $g(x)+g'(x)(x-a)$. **(c)** $g'(xg(a))g(a)$. **(d)** $g(a)$. **(e)** $g'(x+g(a))(1+g'(x))$. **(f)** $g'((x-3)^2)2(x-3)$.

**Ejercicio 7.13:** **(a)** $\frac{d(xyz)}{dt}=yz\frac{dx}{dt}+xz\frac{dy}{dt}+xy\frac{dz}{dt}$.

**(b)** $\frac{d(x(y(z)))}{dt}=\frac{dx}{dt}(y(z))\frac{dy}{dt}(z)\frac{dz}{dt}$.

**Ejercicio 7.14:** $y=\frac{1}{80}x+\frac{2559}{80}$.

**Ejercicio 7.16:**

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^{(n)} &= \begin{cases}(-1)^m\operatorname{sen} x, & n=2m,\\ (-1)^{m+1}\cos x, & n=2m-1,\end{cases}\\ (\cos x)^{(n)} &= \begin{cases}(-1)^m\operatorname{sen} x, & n=2m-1,\\ (-1)^{m+1}\cos x, & n=2m.\end{cases}\end{aligned}$$

**Ejercicio 7.17:** Nótese que si $x>0$, entonces

$$(f)^{(k)}(x)=\begin{cases} k!x^{a-k}, & a>k,\\ k!, & a=k,\\ 0, & a<k.\end{cases}$$

Por otra parte, si $x<0$, entonces

$$(f)^{(k)}(x)=\begin{cases} k!x^{b-k}, & b>k,\\ k!, & b=k,\\ 0, & b<k.\end{cases}$$

El único punto donde quizá no podría existir la $k$-ésima derivada de $f$ es en 0. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}(f)^{(k)}(0+) &= \begin{cases} 0, & a>k, \\ k!, & a=k, \\ 0, & a<k, \end{cases} \\ (f)^{(k)}(0-) &= \begin{cases} 0, & b>k, \\ k!, & b=k, \\ 0, & b<k. \end{cases}\end{aligned}$$

Puesto que $(f)^{(k)}(0)$ existe si y sólo si $(f)^{(k)}(0+)=(f)^{(k)}(0-)$, entonces la condición es ($a \neq k$ y $b \neq k$) o bien ($a=k=b$).

**Ejercicio 7.18:** **(a)** $\frac{2}{3}$. **(b)** 0. **(c)** $-\frac{1}{3}$. **(d)** $\frac{2}{\pi}$. **(e)** 3. **(f)** 0. **(g)** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **(h)** $\frac{2}{3}$. **(i)** 1. **(j)** $-\frac{1}{3}$. **(k)** 0. **(l)** 0.

## Capítulo 8

**Ejercicio 8.1:** Sea $s(t)$ la distancia del origen al automóvil. Puesto que la aceleración es constante, entonces $s(t)$ es de la forma

$$s(t)=c_1t^2+c_2t+c_3.$$

Ya que parte del origen, $s(0)=0$, entonces $c_3=0$. Por otra parte

$$\begin{aligned}180 &= s(10)=c_1(10)^2+c_2(10), \\ 6 &= s'(5)=2c_1(4)+c_2.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $c_1=6$, por lo tanto $a(t)=2c_2=12$ m/s$^2$.

**Ejercicio 8.2:** Sea $s(t)$ la distancia del barco al faro y $x(t)$ la distancia de la proyección del barco al faro, proyectada sobre la costa, es decir,

$$s(t)=\sqrt{4^2+x(t)^2}. \tag{15.9}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}s'(t) &= \frac{1}{2}(4^2+x(t)^2)^{-1/2}2x(t)x'(t) \\ &= \frac{1}{s(t)}x(t)x'(t).\end{aligned}$$

Si $s(t)=5$, entonces de (15.9) tenemos que $x(t)=3$. Puesto que $x'(t)=12$, entonces $s'(t)=36/5$ km/h.

**Ejercicio 8.3:** El costo marginal es de $\frac{266}{11}$ y el costo de producir el décimo primer pantalón es $\frac{265}{11}$.

**Ejercicio 8.4:** **(a)** $v(t)=3t^2-14t+11$. **(b)** $v(t)=(t-1)(3t-11)$, entonces en (0,1) y en (11/3,5) sube y en (1,11/3) baja. **(c)** Se detiene instantaneamente en 1, $\frac{11}{3}$ segundos. **(d)** $a(t)=\frac{d}{dt}(3t^2-14t+11)=6t-14=0$, por lo tanto en $\frac{7}{3}$ segundos la velocidad es constante (instantaneamente).

**Ejercicio 8.5:** **(a)** $v(t) = 168 - 29t$, $a(t) = -28$. **(b)** $v(3) = 81$, $a(3) = -28$. **(c)** 324 m. **(d)** 12 s.

**Ejercicio 8.6:** Se requiere determinar $\frac{dC}{dt}$ cuando $t = 3$. Así

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dC}{dn}\frac{dn}{dt} \\ &= \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{5}n^2 + 3n + 800\right)\frac{d}{dt}\left(4t^2 + 35t\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}n + 3\right)(8t + 35). \end{aligned}$$

Puesto que $n(3) = 4(3)^2 + 35(3) = 141$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt}(3) &= \left(\frac{2}{5}n(3) + 3\right)(8(3) + 35) \\ &= \left(\frac{2}{5}(141) + 3\right)(8(3) + 35) = \frac{17,523}{5}. \end{aligned}$$

Esto significa que 3 horas después de iniciarse la producción el costo total se incrementa a razón de 3,504.6 pesos por hora.

**Ejercicio 8.7:** El volumen está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, por lo tanto $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ que es la superficie de una esfera de radio $r$.

**Ejercicio 8.8:** **(a)** En $(a, b)$, pues no hay aceleración. **(b)** Se aleja en $(0, a)$ y se acerca de $(b, c)$. **(c)** Al tiempo $c$ alcanza su altura máxima, pues la velocidad siempre es positiva.

**Ejercicio 8.9:** **(a)** $2 - \frac{1}{2^5} = 1.9688$. **(b)** $3 - \frac{1}{3^4} = 2.9877$. **(c)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{90}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{90}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.53023$ rad. **(d)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{180}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71945$ rad.

**Ejercicio 8.10:** Sabemos que $V(r+h) \approx V(r) + hV'(r)$, entonces

$$\begin{aligned} V(r) &\approx V(r+h) - hV'(r) \\ &= V(4) - (0.25)\,V'(4 - 0.25) \\ &= \frac{4}{3}\pi(4)^3 - (0.25)4\pi(4 - 0.25)^2. \end{aligned}$$

Así, el volumen interior de la esfera es aproximadamente 223.9 cm$^3$.

**Ejercicio 8.11:** Sabemos que

$$V(r+h) - V(r) = \Delta V(r) \approx dV = hV'(r).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(1500 + 0.03) - V(1500) &\approx (0.03)V'(1500) \\ &= (0.03)4\pi(1500)^2 \\ &= 8.4823 \times 10^5 \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Se necesitarán 424.12 litros, pues es la mitad de la esfera.

**Ejercicio 8.12:** En cualquier caso hay a lo más dos posibles funciones continuas. **(a)** $y' = \frac{x^3}{y^3}$, donde $y$ puede ser $y_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. **(b)** $y' = \frac{4x^3}{5y^4}$, donde $y$ es $y(x) = \left(x^4\right)^{1/5}$, $x \in \mathbb{R}$. **(c)** $y' = \frac{5x^4}{4y^3}$, donde $y$ puede ser $y_1(x) = \left(x^5\right)^{1/4}$, $x \geq 0$, $y_2(x) = -\left(x^5\right)^{1/4}$, $x \geq 0$. **(d)** $y' = \frac{x}{2y^3}$, donde $y$ puede ser $y_1(x) = \left(x^2\right)^{1/4}$, $x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = -\left(x^2\right)^{1/4}$, $x \in \mathbb{R}$. **(e)** $y' = \frac{3x^2}{5y^4}$, donde $y$ es $y(x) = \left(x^3\right)^{1/5}$, $x \in \mathbb{R}$. **(f)** $y' = \frac{x^4}{y^4}$, donde $y$ es $y(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 8.13:** Sea $y$ la parte donde se apoya la escalera en la pared y sea $x$ el apoyo en el suelo, ambas variables dependen del tiempo. Así, por el Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = 4^2. \tag{15.10}$$

Derivando implícitamente tenemos que

$$2x(t)\frac{dx(t)}{dt} + 2y(t)\frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

Buscamos $\frac{dy(t)}{dt}$ cuando $y(t) = 3$, sabiendo que $\frac{dx(t)}{dt} = 0.5$. De (15.10) nos queda

$$x = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

Usando esta información resulta que

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\sqrt{7}}{3}\frac{1}{2}.$$

El otro extremo de la escalera se desliza hacia abajo, por eso el signo negativo, con una velocidad de 0.44 metros por segundo.

**Ejercicio 8.14:** Tenemos que $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$, por lo tanto $\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi r(t)^2 \frac{dr(t)}{dt}$. En 45 minutos se redujo 10 cm, esto significa que $\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{2}{9}$. Así

$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi(25)\left(-\frac{2}{9}\right).$$

Por lo tanto el cambio de volumen es de $-69.813$ cm$^3$/min. El signo menos significa se que reduce el volumen.

**Ejercicio 8.15:** El volumen de un cono de altura $h$ y radio $r$ es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Puesto que

$$\frac{r}{h} = \frac{8}{18} \Rightarrow r = \frac{4}{9}h.$$

Así $V = \frac{16}{243}\pi h^3$, por lo tanto

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{81}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{81}{16}\frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Puesto que $\frac{dV}{dt} = 10$, entonces cuando $m = 4$ resulta que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{81}{16}\frac{1}{\pi 4^2}10.$$

Así, la velocidad de cambio del nivel del agua a 4 m es aproximadamente de un litro por minuto.

**Ejercicio 8.16:** Sea $x(t)$ la distancia del inicio de la pista al avión después de $t$ horas. Por lo tanto, la distancia de la cabina de control al avión es

$$l(t) = \sqrt{(0.5)^2 + (0.07)^2 + x^2(t)}.$$

Entonces

$$\frac{dl(t)}{dt} = \left(0.2549 + x^2(t)\right)^{-1/2} x(t)\frac{dx(t)}{dt}.$$

Puesto que en 0.8 km la velocidad es de $\frac{dx(t)}{dt} = 500$, entonces

$$\frac{dl(t)}{dt} = \left(0.2549 + (0.8)^2\right)^{-1/2}(0.8)(500) = 422.84,$$

es decir, la rapidez de cambio buscada será de 422.84 km/h.

## Capítulo 9

**Ejercicio 9.1:** El capital inicial es $f(0) = 4.3$. Si el capital baja de 4.3, entonces existe un $r > 0$ tal que $f(r) = 4.3$, esto es debido a que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ y al Teorema del Valor Intermedio. Por la propiedad (II) de las funciones continuas existe un punto mínimo $s \in (0, r)$, por lo tanto $f'(s) = 0$. Es decir

$$\frac{1}{4}(s^2)^2 + 3a(s^2) + b = 0.$$

De esto deducimos que el capital nunca es menor que 4.3, si esta ecuación no tiene raíz, es decir, si su discriminante es negativo. Por lo tanto, la condición sobre los parámetros es $9a^2 < b$.

**Ejercicio 9.2:** El valor máximo es 1 y se alcanza en 1/2, el valor mínimo es 0 y se alcanza en 0 y en 1.

**Ejercicio 9.3:** El valor mínimo es 1 y se alcanza en 0, no tiene valores máximos.

**Ejercicio 9.4:** Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Los puntos críticos son aquellos puntos que son solución de la ecuación $0 = p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$. Puesto que esta ecuación es de grado 2, entonces $p$ tiene a lo más dos valores críticos.

**Ejercicio 9.5:** Por ser $f$ un polinomio, entonces $f$ es continua en $[1,3]$ y diferenciable en $(1,3)$. Queremos que

$$3c^2 - 10c - 3 = -10.$$

Por ende, los valores posibles para $c$ son $\frac{7}{3}, 1$.

**Ejercicio 9.7:** Para hacer las gráficas hay que usar traslaciones donde convenga. Supongamos que $x_1 < x_2$. **(a)** Sean $x_1$, $x_2 \in (n, n+1)$. Entonces $[\![x_1]\!] = [\![x_2]\!] = n$, por lo tanto

$$x_1 - [\![x_1]\!] = x_1 - n < x_2 - n = x_2 - [\![x_2]\!].$$

Por ende, la función $f(x) = x - [\![x]\!]$, es creciente en $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. **(b)** Es claro que

$$x_1 + 2 < x_2 + 2.$$

Por lo tanto $f(x)=x+2$ es creciente en todo $\mathbb{R}$. **(c)** Ya sabemos que $x^3$ es creciente, entonces
$$(x_1+2)^3<(x_2+2)^3 \Rightarrow (x_1+2)^3-4<(x_2+2)^3-4.$$
Así, $f(x)=(x+2)^3-4$, es creciente en todo $\mathbb{R}$. **(d)** La función es creciente en $(0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$. Supongamos que $x_1,\ x_2\in(0,\infty)$. Multiplicando $x_1<x_2$ en ambos lados por $x_1$, obtenemos $(x_1)^2<x_2x_1$. Análogamente, si multiplicamos $x_1<x_2$ en ambos lados por $x_2$, obtenemos $x_1x_2<(x_2)^2$, así
$$(x_1)^2<x_2x_1<(x_2)^2.$$
De manera similar, si $x_1,\ x_2\in(-\infty,0)$ resulta que
$$(x_1)^2>x_2x_1>(x_2)^2.$$
**(e)** La función $f$ es creciente en $(1,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,1)$. Veamos un caso. Si $x_1,\ x_2\in(1,\infty)$, entonces $x_1-1,\ x_2-1\in(0,\infty)$. Por el inciso anterior resulta
$$(x_1-1)^2<(x_2-1)^2 \Rightarrow (x_1-1)^2+2<(x_2-1)^2+2,$$
como se quería verificar. **(f)** Completemos el cuadrado $x^2+2x=(x+1)^2-1$. Procediendo como el ejercicio precedente podemos verificar que la función $f$ es creciente en $(-1,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)$.

## Capítulo 10

**Ejercicio 10.1:** La convexidad de $f$ implica que la pendiente del segmento que une los puntos $(u,f(u)),(tu+(1-t)v,f(tu+(1-t)v))$ es menor que la pendiente del segmento que une los puntos $(u,f(u)),(v,f(v))$, debido a que $u\le tu+(1-t)v\le v$:
$$\frac{f(tu+(1-t)v)-f(u)}{(tu+(1-t)v)-u}\le\frac{f(v)-f(u)}{v-u}.$$
Simplificando obtenemos la desigualdad deseada.

**Ejercicio 10.2:** Sea $x\in[a,b]$, entonces $x=ta+(1-t)b$, donde
$$t=\frac{b-x}{b-a}\in[0,1].$$
Por el ejercicio anterior tenemos que
$$\begin{aligned} f(x) &= f(ta+(1-t)b)\\ &\le tf(a)+(1-t)f(b)\\ &\le t\max\{f(a),f(b)\}+(1-t)\max\{f(a),f(b)\}\\ &= \max\{f(a),f(b)\}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 10.3:** Sean $0<u<r<v$. Queremos verificar que
$$\frac{r+\frac{1}{r}-u-\frac{1}{u}}{r-u}\le\frac{v+\frac{1}{v}-u-\frac{1}{u}}{v-u}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (v-u)\left(r+\frac{1}{r}-u-\frac{1}{u}\right)\leq (r-u)\left(v+\frac{1}{v}-u-\frac{1}{u}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{ru}(u-v)\left(-r^2u+ru^2+r-u\right)\leq \frac{1}{uv}(r-u)\left(-u^2v+uv^2+u-v\right)\\
&\Leftrightarrow 0\leq ru(r-u)\left(-u^2v+uv^2+u-v\right)-uv(u-v)\left(-r^2u+ru^2+r-u\right)\\
&\Leftrightarrow u(r-u)(v-r)(v-u)\geq 0.
\end{aligned}$$

Puesto que la última desigualdad es cierta, entonces $f$ es convexa.

**Ejercicio 10.4:** Por ser $x_0$ un mínimo local tenemos que $f'$ es negativa un poco a la izquierda de $x_0$ y positiva un poco a la derecha de $x_0$. Entonces, para $h$ suficientemente pequeño tenemos que

$$\frac{f'(x_0+h)}{h}>0.$$

Por otra parte, del Teorema de Fermat se sigue que $f'(x_0)=0$. De este modo

$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}\geq 0.$$

**Ejercicio 10.5:** Se usará el criterio de la segunda derivada. **(a)** $\sqrt[3]{2}$ es un mínimo local. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{x^3}\left(x^3-2\right),\\
\frac{d^2}{dx^2}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{6}{x^4},\\
g''(\sqrt[3]{2}) &> 0.
\end{aligned}$$

Más aún, $\sqrt[3]{2}$ es un mínimo global. **(b)** $2^{-\frac{1}{3}}$ es un mínimo global,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2+\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^2}\left(2x^3-1\right),\\
\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right) &= \frac{2}{x^3}\left(x^3+1\right),\\
f''(2^{-\frac{1}{3}}) &> 0.
\end{aligned}$$

**(c)** Los valores críticos son $1, \frac{3}{2}, 2$,

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\left((x-1)^2(x-2)^2\right)=4x^3-18x^2+26x-12,\\
\frac{d^2}{dx^2}\left((x-1)^2(x-2)^2\right)=12x^2-36x+26,\\
h''(1)=2>0,\ \ h''\left(\frac{3}{2}\right)=-1<0,\ \ h''(2)=2>0.
\end{gathered}$$

Por lo tanto 1 y 2 son mínimos y $\frac{3}{2}$ es un máximo. Los puntos $\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{3}{2}=1.7887$ y $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}=1.2113$ son puntos de inflexión. **(d)** $-\sqrt[3]{2}=-1.2599$ es un máximo global,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x-\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{x^3}\left(x^3+2\right)\sqrt[3]{2},\\ \frac{d^2}{dx^2}\left(x-\frac{1}{x^2}\right) &= -6\frac{\sqrt[3]{2}}{x^4},\\ y''(-\sqrt[3]{2}) &< 0.\end{aligned}$$

**(e)** $-2^{-1/3}$ es un mínimo global,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2-\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^2}\left(2x^3+1\right),\\ \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right) &= \frac{2}{x^3}\left(x^3-1\right),\\ k''(-2^{-1/3}) &> 0,\end{aligned}$$

y 1 es un punto de inflexión. **(f)** 0 es un mínimo global,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) &= \frac{2x}{(x^2+1)^2},\\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) &= -\frac{2\left(3x^2-1\right)}{(x^2+1)^3},\\ q''(0) &> 0,\end{aligned}$$

y $\frac{1}{3}\sqrt{3},-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ son puntos de inflexión.

**Ejercicio 10.6:** El polinomio $p$ tiene sólo una raíz real si $p$ es creciente. Es decir, si $0<p'(x)=3x^2+2ax+b$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Para encontrar el mínimo de $p'$ hacemos $p''(x)=2a+6x$. Así $-\frac{1}{3}a$ es un valor crítico de $p'$. Puesto que $p'''\left(-\frac{1}{3}a\right)>0$, entonces $-\frac{1}{3}a$ es un punto mínimo para $p'$. Por lo tanto

$$p'(x)\geq p'\left(-\frac{1}{3}a\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Por ende, basta pedir que

$$p'\left(-\frac{1}{3}a\right)=3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2+2a\left(-\frac{1}{3}a\right)+b=b-\frac{1}{3}a^2>0,$$

es decir $3b>a^2$.

## Capítulo 11

**Ejercicio 11.1:** **(a)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{x^3+1}\right)=\frac{xe^{x^2}}{(x^3+1)^2}\left(2x^3-3x+2\right)$,
$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^{x^2}}{x^3+1}\right)=\frac{2e^{x^2}}{(x^3+1)^3}(2x^8-5x^6+4x^5+6x^4-4x^3+2x^2-3x+1)$.
**(b)** $\frac{d}{dx}\left(e^{1/x}+1/e^x\right)=-\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}+x^2e^{-x}\right)$,

$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{1/x}+1/e^x\right)=\frac{1}{x^4}\left(e^{\frac{1}{x}}+2xe^{\frac{1}{x}}+x^4e^{-x}\right)$.
**(c)** $\frac{d}{dx}(e^{-3x}-e^{3x})^5=-\frac{15}{e^{15x}}\left(e^{6x}-1\right)^4\left(e^{6x}+1\right)$,
$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-3x}-e^{3x})^5=-\frac{45}{e^{15x}}\left(e^{6x}-1\right)^3\left(5e^{2(6x)}+6e^{6x}+5\right)$.
**(d)** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{2x}+3x}\right)=\frac{2e^{2x}+3}{2\sqrt{3x+e^{2x}}}$,
$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{e^{2x}+3x}\right)=-\frac{1}{4(3x+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\left(12e^{2x}-24xe^{2x}-4e^{2(2x)}+9\right)$.
**(e)** $\frac{d}{dx}\left(e^{e^x}\right)=e^{x+e^x}$, $\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{e^x}\right)=e^{x+e^x}\left(e^x+1\right)$.
**Ejercicio 11.2:** **(a)** $5y^4y'+xe^yy'+e^y=6x\Rightarrow y'=\frac{1}{xe^y+5y^4}\left(6x-e^y\right)$.
**(b)** $xe^{y^2}2yy'+e^{y^2}-xe^yy'-e^y+ye^x+y'e^x=0\Rightarrow y'=\frac{e^y-e^{y^2}-ye^x}{e^x-xe^y+2xye^{y^2}}$.
**(c)** $e^{xy}(xy'+y)-3x^2+6yy'=0\Rightarrow y'=\frac{1}{6y+xe^{xy}}\left(3x^2-ye^{xy}\right)$.
**(d)** $e^{xe^y-e^{ye^x}}(xe^yy'+e^y-e^{ye^x}(ye^x+y'e^x))=10xyy'+5y^2\Rightarrow$
$y'=-\frac{5y^2-\exp\left(-e^{ye^x}+xe^y\right)\left(e^y-ye^xe^{ye^x}\right)}{\exp\left(-e^{ye^x}+xe^y\right)\left(e^xe^{ye^x}-xe^y\right)+10xy}$.
**Ejercicio 11.3:** Tenemos que $y'=2+e^{-x}$ y $y'=3$. Igualando las ecuaciones resulta que $x=0$. Así la ordenada al origen es $y(0)=-1$. Por lo tanto, la recta buscada es $y=3x-1$.
**Ejercicio 11.5:** **(a)** 0. **(b)** $\infty$. **(c)** $-\infty$. **(d)** 2.
**Ejercicio 11.6:** **(a)**

$$\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2+\left(\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\right)^2=\frac{4e^{-2x}}{\left(e^{-2x}+1\right)^2}+\frac{\left(e^{-2x}-1\right)^2}{\left(e^{-2x}+1\right)^2}=1.$$

**(b)**

$$\begin{aligned}&\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{1}{4e^{-(x+y)}}\left(e^{-2x}+1\right)\left(e^{-2y}+1\right)+\frac{1}{4e^{-(x+y)}}\left(e^{-2x}-1\right)\left(e^{-2y}-1\right)\\&=\frac{e^{x+y}}{2}\left(e^{-2(x+y)}+1\right)=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh\left(x+y\right).\end{aligned}$$

**Ejercicio 11.8:** **(a)** $(\cosh(x))^{(n)}=\frac{e^x+(-1)^ne^{-x}}{2}$. **(b)** $(\mathrm{senh}(x))^{(n)}=\frac{e^x-(-1)^ne^{-x}}{2}$. **(c)** $g^{(n)}(x)=(x+n)e^x$.

## Capítulo 12

**Ejercicio 12.1:** Usar traslaciones para graficar $f(x)=\frac{1}{x+2}$, luego reflejar con respecto a la diagonal. De hecho la función inversa es $\frac{1}{x}-2$.
**Ejercicio 12.2:** **(a)** Sean $f$ y $g$ inyectivas. Si

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(y)\quad&\Rightarrow\quad f(g(x))=f(g(y))\\&\Rightarrow\quad g(x)=g(y)\Rightarrow x=y.\end{aligned}$$

**(b)** Puesto que

$$(f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}(x)=x\quad\Rightarrow\quad f((g\circ(f\circ g)^{-1})(x))=x$$

$$\Rightarrow \quad g(f\circ g)^{-1}(x) = f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow \quad (f\circ g)^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = (g^{-1}\circ f^{-1})(x).$$

La expresión para $(f\circ g)^{-1}$ es $g^{-1}\circ f^{-1}$. **(c)** Si $f\circ g$ es inyectiva, entonces $g$ es inyectiva. En efecto, si $g(x)=g(y)$, implica $f(g(x))=f(g(y))$, pero esto es $(f\circ g)(x)=(f\circ g)(y)$, por lo tanto $x=y$.

**Ejercicio 12.3:** **(a)** $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$. **(b)** $(-\infty,-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\infty)$. **(c)** $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. **(d)** Escribamos $\frac{rx+s}{px+q}=\frac{r}{p}+\frac{sp-rq}{p(px+q)}$. Si $qr=ps$, la función $f$ es la constante $\frac{r}{p}$, por lo tanto no hay ningún intervalo donde $f$ sea inyectiva. Si $qr\neq ps$, entonces el signo de $f'(x)=\frac{qr-ps}{(q+px)^2}$ depende de la constante $qr-ps$. Por lo tanto, los intervalos de inyectividad son $(-\infty,-\frac{q}{p})$ y $(-\frac{q}{p},\infty)$.

**Ejercicio 12.4:** **(a)** $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$, $x\geq -1$. **(b)** $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$. **(c)** $h^{-1}(x)=x^2-1$, $x\geq 0$. **(d)** $h^{-1}(x)=x^3+1$, $x\in\mathbb{R}$.

**Ejercicio 12.5:** **(a)** $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$. **(b)** $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

**Ejercicio 12.6:** La derivada es

$$(f^{-1})'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(-x)^{-1/2}, & x<0,\\ -\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}, & x>1.\end{cases}$$

**Ejercicio 12.7:** Para graficar la función inversa hay que usar la reflexión con respecto a la diagonal de la gráfica de $f$. Además, $(f^{-1})'(x)=1$, para cada $x\in(n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

## Capítulo 13

**Ejercicio 13.1:** **(a)** $-(\operatorname{sen} x)\,e^{\cos x}\,\frac{\cos(e^{\cos x})}{\operatorname{sen}(e^{\cos x})}$. **(b)** $\frac{84x+3}{24x^2+26x-5}$.
**(c)** $\frac{1}{5}\,\frac{x^3}{x^4-1}\left(x^5+1\right)\frac{-x^3+2x^2-3x+4}{(x^4-x^3+x^2-x+1)^2}$. **(d)** $\frac{1}{x}\,\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\,\frac{\cos(\ln(\operatorname{sen}(\ln x)))}{\operatorname{sen}(\ln(\operatorname{sen}(\ln x)))}$.

**Ejercicio 13.2:** **(a)** $\frac{1}{2}e$. **(b)** 0. **(c)** 2. **(d)** 1. **(e)** 1. **(f)** $e^3$.

**Ejercicio 13.3:** **(a)** $2y\,y'+\frac{2xy-3x^2y'}{x^2y}-4=0 \Rightarrow y'=\frac{2}{x}\,y\,\frac{2x-1}{2y^2-3}$.
**(b)** $3y^2y'+\frac{x}{y}\left(xy'+y\right)+2x\ln(xy)=5\Rightarrow y'=\frac{y}{x^2+3y^3}\left(5-x-2x\ln xy\right)$.

**Ejercicio 13.4:** Derivamos implícitamente $3x^2-\frac{x}{y}y'-\ln y+3y^2y'=2\Rightarrow y'=\frac{1}{3y^2-\frac{x}{y}}\left(\ln y-3x^2+2\right)$. Por lo tanto la pendiente en $(2,1)$ es $-5$. Por ende, la ecuación de la línea recta es

$$\frac{y-1}{x-2}=-5\Rightarrow y=11-5x.$$

**Ejercicio 13.5:** Tomando logaritmos queda $\ln y=a\ln x$, derivamos implícitamente $\frac{y'}{y}=\frac{a}{x}$. Por lo tanto $y'=\frac{a}{x}y=ax^{a-1}$.

**Ejercicio 13.7:** $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-2)!(n+x)}{(1+x)^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

**Ejercicio 13.8:** **(a)** $\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$. **(b)** $\frac{1}{1+y^2}$.

**Ejercicio 13.9:** **(a)** Sea $y=\cos^{-1}x$. Usando que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$, obtenemos $\tan\left(\frac{y}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. De lo cual se sigue que $\frac{y}{2}=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. **(b)** Sea $y=\cos^{-1}x$. Usando $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$, nos queda $\cos(2y)=2(\cos y)^2-1=2x^2-1$. Por lo tanto, $2y=\cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$. **(c)** Sean $\alpha=\tan^{-1}x$, $\beta=\tan^{-1}y$. Usando que $\tan(\alpha+\beta)=$

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, nos queda $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=\frac{x+y}{1-xy}$, de esto obtenemos el resultado buscado.

**Ejercicio 13.10:** **(a)** Sea $y=\cos x$, entonces $y^4-8y^2+3=0$. Las soluciones son

$$\sqrt{4-\sqrt{13}},-\sqrt{4-\sqrt{13}},\sqrt{\sqrt{13}+4},-\sqrt{\sqrt{13}+4},$$

y las únicas soluciones que están en el intervalo $(0,\pi)$ son $\cos^{-1}\left(\sqrt{4-\sqrt{13}}\right)=0.8917$ y $\cos^{-1}\left(-\sqrt{4-\sqrt{13}}\right)=2.2498$. **(b)** Usando $\operatorname{sen}(3\theta)=3\operatorname{sen}(\theta)-4\operatorname{sen}^3(\theta)$, nos queda $4y^3-y^2-3y=0$, con $y=\operatorname{sen}x$. Por lo tanto las posibilidades son $x=\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{4})=-0.84806$, $x=\operatorname{sen}^{-1}(0)=0$, $x=\operatorname{sen}^{-1}(1)=1.5708$. La única opción válida es $x=-0.84806$, en $(-\pi/3,0)$.

**Ejercicio 13.11:** **(a)** $\frac{\pi}{4}$. **(b)** $\frac{\pi}{2}$. **(c)** $\frac{3\pi}{4}$. **(d)** $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Capítulo 14

**Ejercicio 14.1:** Sean $5=x+y+z$, $x+y=3z$. Así $5=3z+z$, por lo tanto $z=\frac{5}{4}$. Esto implica $\frac{15}{4}=x+y$. Sea $P=xyz=\frac{5}{4}x\left(\frac{15}{4}-x\right)$. Encontramos que el producto máximo es $\frac{1125}{256}$, en $x=\frac{15}{8}$. Así, $y=\frac{15}{8}$.

**Ejercicio 14.2:** Sea $20=x+y$. Para el cuadrado $A_1=z^2$, $x=4z$, y para el círculo $A_2=\pi w^2$, $y=2\pi w$. Entonces $A=A_1+A_2=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2$, pero $y=20-x$. Por lo tanto, $A(x)=\frac{1}{16\pi}\left(\pi x^2-160x+4x^2+1600\right)$. El valor mínimo es $\frac{100}{\pi+4}$ cuando $x=\frac{80}{\pi+4}$. Por ende, $y=20-\frac{80}{\pi+4}=20\frac{\pi}{\pi+4}$.

**Ejercicio 14.3:** Sea $l$ la longitud del cable y sea $x$ la distancia del poste de 20 m al punto $P$, donde se fijará el cable en el suelo. Por lo tanto, $30-x$ es la distancia del poste de 28 m al punto $P$. Además, sean $y$ y $z$ la distancia de los extremos superiores de los postes de 20 m y 28 m, respectivamente, al punto $P$. Con esto tenemos que $l=y+z$ y además, por el Teorema de Pitágoras, $y^2=x^2+(20)^2$, $z^2=(30-x)^2+(28)^2$. De este modo, $l=\sqrt{x^2+(20)^2}+\sqrt{(30-x)^2+(28)^2}$. Así, la mínima distancia es $\frac{\sqrt{2225}+\sqrt{4361}}{2}=56.604$ y se alcanza en $x=\frac{25}{2}=12.5$.

**Ejercicio 14.4:** Sean $r$, $h$ el radio y la altura, respectivamente, del cono. El volumen del cono es $V=\frac{\pi}{3}r^2h$. Se puede hacer una figura y observar que se inscribe en el círculo de radio $a$ un triángulo de altura $h-a$, base $r$ e hipotenusa $a$. Usando el Teorema de Pitágoras nos queda $a^2=r^2+(h-a)^2$. Por lo tanto, $V=\frac{\pi}{3}\left(2ah^2-h^3\right)$. Así, el volumen es máximo si $h=\frac{4a}{3}$ y $r=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

**Ejercicio 14.5:** Sean $x$, $y$ la base y la altura, respectivamente, del rectángulo. Consideremos el triángulo inscrito en el rectángulo de base $\frac{x}{2}$, altura $y$ e hipotenusa $a$. Así $a^2=y^2+(\frac{x}{2})^2$, por lo tanto, el área del rectángulo es $xy=x\sqrt{a^2-(\frac{x}{2})^2}$. De esto obtenemos las dimensiones buascadas $x=\sqrt{2}a$ y $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

**Ejercicio 14.6:** Sean $x$, $y$ la base y la altura de la página. Así $81=(y-6)(x-4)$ y el precio es $x+y=x+\frac{81}{x-4}+6$. De aquí encontramos que el precio más bajo es de 28 pesos cuando $x=13$ y $y=15$.

**Ejercicio 14.7:** La distancia del punto $(0,4)$ al punto es $(x,y)$ está dada por

$$\sqrt{(0-x)^2+(4-y)^2}=\sqrt{(0-x)^2+\left(4-\frac{x^2}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{x^4-16x^2+256}.$$

De aquí vemos que el mínimo es 4 en $-2\sqrt{2}$ o en $2\sqrt{2}$. Por lo tanto el punto en la parábola es $(-2\sqrt{2},2)$ o bien $(2\sqrt{2},2)$.

**Ejercicio 14.8:** El volumen del cilindro es $V=\pi r^2 h$, donde $r$ es el radio y $h$ es la altura. La superficie es $S=$ área de las tapas + área lateral $=2\pi r h+2\pi r^2$. Así $V=\pi r^2\left(\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}\right)$. De esto deducimos que $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $h=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$ nos proporcionan el volumen máximo.

**Ejercicio 14.9:** Sean $x, y$ la distancia del cable subterráneo y subfluvial, respectivamente. Por lo tanto, el costo será $C=3000x+5000y$. Haciendo un dibujo vemos que se forma un triángulo rectángulo de base $4-x$, altura 1 e hipotenusa $y$. Entonces $y^2=1^2+(4-x)^2$. Por lo tanto, $C=3000x+5000\sqrt{1+(4-x)^2}$. De lo cual deducimos que el costo mínimo es de $16,000$ cuando $x=\frac{13}{4}$ y $\frac{5}{4}$.

**Ejercicio 14.10:** Sea $x$ el volumen del pedido. En caso de menudeo el ingreso es $20x$, $0\le x\le 50$, por lo tanto el ingreso máximo es 1000 pesos. En el de mayoreo el ingreso es $x(20-0.02x)$, $50<x\le 600$. Aquí el ingreso máximo es de 5000 pesos cuando $x=500$. Por lo tanto, el pedido que produce máximo ingreso es de 500 piezas.

**Ejercicio 14.11:** Sea $t$ el tiempo en horas, a partir de las 10:00 A.M. Después de $t$ horas el vehículo más lento estará alejado del punto $P$ a $20t$ km, mientras que el vehículo más veloz estará a $2-50t$ km más cerca de $P$. Por lo tanto, la distancia entre los vehículos es $\sqrt{(20t)^2+(2-50t)^2}$. De esto tenemos que la distancia más corta es $\frac{4}{29}\sqrt{29}=0.74278$ km a las $\frac{1}{29}=3.4483\times 10^{-2}$ horas.

**Ejercicio 14.12:** Sean $y, x$ la distancia que rema y camina, respectivamente. Haciendo una figura vemos que se forma un triángulo rectángulo de base $6-x$, altura 2 y hipotenusa $y$. Así que $y^2=2^2+(6-x)^2$. Usando la fórmula velocidad = distancia/tiempo, tenemos que el tiempo total será $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{4+(6-x)^2}}{3}$. De esto resulta que el tiempo mínimo es $\frac{26}{15}=1.7333$ horas y se alcanza si camina $\frac{9}{2}$ km y rema $2.5$ km.

**Ejercicio 14.13:** **(a)** Aumentó la cantidad de agua en la presa de enero a junio. **(b)** En el mes de junio. **(c)** La cantidad máxima de agua fue de 10 millones de litros.

## Apéndice

**Ejercicio 15.1:** Supongamos $a>0$. Si $\frac{1}{a}<0$, entonces $1=a\cdot\frac{1}{a}<a\cdot 0=0$. Lo que es imposible, por lo tanto $\frac{1}{a}>0$. Análogamente se hace el otro caso.

**Ejercicio 15.2:** Si $a>0$, entonces tomando $\varepsilon=\frac{a}{2}$, nos queda $0\le a<\frac{a}{2}$, lo que implica $0\le 1<\frac{1}{2}$. Por lo tanto, $a=0$.

**Ejercicio 15.3:** Verificaremos sólo que $(a,b)\cap(c,d)=(\text{máx}\{a,c\},\text{mín}\{b,d\})$. Sea $x\in(\text{máx}\{a,c\},\text{mín}\{b,d\})$, entonces $\text{máx}\{a,c\}<x<\text{mín}\{b,d\}$, así $a\le\text{máx}\{a,c\}<x<\text{mín}\{b,d\}\le b$ y $c\le\text{máx}\{a,c\}<x<\text{mín}\{b,d\}\le d$, esto significa que $x\in(a,b)\cap(c,d)$, por lo tanto $(\text{máx}\{a,c\},\text{mín}\{b,d\})\subset(a,b)\cap(c,d)$. Para ver la otra contensión consideraremos cuatro casos. Sea $x\in(a,b)\cap(c,d)$, entonces $a<x<b$ y $c<x<d$:

**(1)** Si $\text{máx}\{a,c\}=a$, $\text{mín}\{b,d\}=b$, entonces $\text{máx}\{a,c\}=a<x<b=\text{mín}\{b,d\}$.

**(2)** Si $\text{máx}\{a,c\}=a$, $\text{mín}\{b,d\}=d$, entonces $\text{máx}\{a,c\}=a<x<d=\text{mín}\{b,d\}$.

**(3)** Si $\max\{a,c\} = c$, $\min\{b,d\} = b$, entonces $\max\{a,c\} = c < x < b = \min\{b,d\}$.

**(4)** Si $\max\{a,c\} = c$, $\min\{b,d\} = d$, entonces $\max\{a,c\} = c < x < d = \min\{b,d\}$.

Por ende, $x \in (\max\{a,c\}, \min\{b,d\})$. Así $(a,b) \cap (c,d) \subset (\max\{a,c\}, \min\{b,d\})$.

**Ejercicio 15.4:** Una posible respuesta es analizando la composición de la función cuadrática y con la función raíz cuadrada, como se hace en el Ejercicio 3.5. Para una explicación más detallada siempre se puede recurrir a su profesor.

**Ejercicio 15.5:** **(a)** No se puede factorizar. **(b)** $(3x-2)(2x-1)$. **(c)** $(x-1)^2(x+1)^2$. **(d)** $(x-4)(4x+3)$.

**Ejercicio 15.6:** Si tiene una raíz real, entonces su discriminante $\Delta$ es no negativo. Por lo tanto, también su otra raíz es real. Sabemos que $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, entonces

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = r_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

**Ejercicio 15.7:** **(a)** $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \infty\right)$. **(b)** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

# Notas y listas de símbolos

## Notas

La modelación matemática es sin duda una herramienta poderosa que le ha permitido a la humanidad desarrollarse en diversos ámbitos. Este hecho tácito nos debería motivar para aprender a modelar matemáticamente, pues en cualquier momento podemos requerir su uso. El Capítulo 2 de [5] es un buen inicio a la modelación matemáticas pues enseña a planter y resolver problemas en forma de pequeños modelos matemáticos.

El concepto de función que se utiliza en este libro es intuitivo. La definición rigurosa es dada en términos de conjuntos, ésta puede consultarse en el Apéndice del Capítulo 2 de [8]. En [6] se pueden encontrar más problemas sobre traslación y graficación de funciones. Por otra parte, para un buen repaso sobre las propiedades del valor absoluto se puede consultar [4]. En general, las referencias [4], [6] y [7] tienen un enfoque práctico y traen una gran cantidad de ejercicios sobre todos los temas de este libro.

Por otro lado, las referencias [1], [3] y [8] abordan el cálculo desde un enfoque teórico y pueden consultarse para revisar las demostraciones de algunos hechos que sólo se mencionan. Por ejemplo, el uso formal de la definición de límite se puede estudiar en el Capítulo 4 de [1]. En este capítulo también se demuestran las propiedades de los límites. Cabe mencionar que [2] trae una buena selección de ejercicios resueltos usando la definición formal de límite. Las demostraciones de las propiedades de las funciones continuas pueden consultarse en [8]. Asu vez [1] da una demostración bastante accesible de la regla de la cadena. En particular se sugiere [3] para estudiar la Regla de L'Hospital, su enfoque es directo y trae buenos ejercicios sobre este tema.

## Lista de símbolos

$\in$ : pertenece a

$\notin$ : no pertenece a

$\subset$ : subconjunto

$\varnothing$ : conjunto vacío

$\cup$ : unión

$\cap$ : intersección

$\forall$ : para cada (o para todo)

$\approx$ : aproximadamente

$\Rightarrow$ : implica: Si $P$ y $Q$ son proposiciones, entonces $P$ implica a $Q$ $(P \Rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow$ : equivalencia: $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$

$\text{máx}\{a, b\}$ : valor máximo de $a$ y $b$

$\text{mín}\{a, b\}$ : valor mínimo de $a$ y $b$

# Bibliografía


[1] R. G. Bartle (2010). **Introducción al Análisis Matemático de una Variable**, Editorial Limusa/Wiley.

[2] A. Pinzón (1977). **Cálculo I: Diferencial**, Editorial Harla.

[3] A. Friedman (1971). **Advanced Calculus**, Dover.

[4] L. Leithold (2009). **El Cálculo con Geometría Analítica**, Séptima edición, Editorial Harla.

[5] Y. Perelman (1978). **Álgebra Recreativa**, Sexta reimpresión, Editorial Mir - Moscú.

[6] J. Stewart (2001). **Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas**, Cuarta edición, Thompson Learning.

[7] E. W. Swokowski (1988). **Cálculo con Geometría Analítica**, Segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica.

[8] M. Spivak (2001). **Calculus**, Segunda edición, Editorial Reverté S.A.

[9] J. Villa-Morales (2010). **Introducción a las Ecuaciones**, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

# Índice alfabético